



TITLE:

# K- $\epsilon$ モデルによる矩形断面柱の空力特性評価と空力弾性挙動予測に関する研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

嶋田, 健司

---

CITATION:

嶋田, 健司. K- $\epsilon$ モデルによる矩形断面柱の空力特性評価と空力弾性挙動予測に関する研究. 京都大学, 2000, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2000-03-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3167512>

RIGHT:

く

$k-\epsilon$  モデルによる矩形断面柱の空力特性評価と  
空力弾性挙動予測に関する研究

平成 1 1 年 1 2 月

嶋 田 健 司

# 目次

第1章 序論 .....	7
1. 1 本研究の背景 .....	7
1. 2 矩形断面柱の空力弾性振動に関する既往の研究概要 .....	10
1. 2. 1 矩形断面柱の空力特性の辺長比による分類 .....	10
1. 2. 2 並進振動 .....	10
1. 2. 2. 1 Karman 型渦励振 .....	10
1. 2. 2. 2 1 せん断層不安定型渦励振 .....	10
1. 2. 3 ねじれ振動 .....	15
1. 2. 4 基本矩形断面柱の空力弾性振動に関する既往の数値解析的研究 .....	19
参考文献 .....	23
第2章 数値解析方法 .....	27
2. 1 概要 .....	27
2. 2 平均化 Navier-Stokes 方程式の誘導 .....	27
2. 3 $k$ - $\epsilon$ モデルの導出 .....	30
2. 4 Kato-Launder モデル .....	32
2. 5 Two-layer モデル .....	34
2. 5. 1 Two-layer モデルの背景 .....	34
2. 5. 2 Two-layer モデルの構成式 .....	35
2. 5. 3 Two-layer モデルの本解析における取り扱い .....	37
2. 6 RANS モデルによる非定常流解析の概念 .....	38
2. 7 一般座標系導入のメリットおよびデメリット .....	39
2. 8. 1 1 階導関数 .....	40
2. 8. 2 2 階導関数 .....	42
2. 9 一般座標系による基礎方程式系の定式化 .....	44
2. 9. 1 基礎方程式 .....	44
2. 9. 2 一般座標系による基礎方程式 .....	45
2. 10 固体壁上の圧力の境界条件 .....	48
2. 11 移動座標系における慣性項 .....	49
2. 12 3 次精度風上差分 .....	50
2. 13 時間進行法 .....	52

2. 1 4	空気力の算出 .....	58
2. 1 5	格子生成 .....	59
参考文献 .....		61
第3章 種々の断面辺長比を有する矩形断面柱の空力特性評価に関する修正型 $k-\epsilon$ モデルの適用性の検討 .....		63
3. 1	概要 .....	63
3. 2	解析方法 .....	65
3. 2. 1	基礎方程式 .....	65
3. 2. 2	物体壁面近傍の乱流モデルの取扱い .....	66
3. 2. 3	時間進行, 移流項および圧力の解法 .....	67
3. 2. 4	解析格子および境界条件 .....	67
3. 3	解析結果 .....	69
3. 3. 1	解析手法の検証 (辺長比 $B/D=1.0$ の場合) .....	69
3. 3. 2	辺長比による空力特性の変化 .....	79
3. 3. 3	完全剥離型断面について ( $B/D<2.8$ ) .....	81
3. 3. 4	再付着型断面について ( $2.8<B/D \leq 8.0$ ) .....	82
3. 3. 5	変動風圧係数・変動揚力係数について .....	83
3. 4	結論 .....	85
参考文献 .....		86
第4章 2次元疑似 direct simulation による $B/D=2.0$ の自己励起型渦励振の解析 .....		89
4. 1	概要 .....	89
4. 2	解析方法 .....	90
4. 3	解析結果 .....	93
4. 3. 1	断面まわりの流れ場 .....	93
4. 3. 2	応答結果 .....	95
4. 3. 3	振動時の空気力 .....	98
4. 3. 3. 1	変位と揚力係数のリサージュ .....	98
4. 3. 3. 2	側面上の非定常風圧分布 .....	101
4. 3. 3. 3	強制加振時の非定常空気力 .....	101
4. 4	結論 .....	103
参考文献 .....		104

第5章 並進 1 自由度空力振動予測への適用性の検討 .....		107
5. 1	概要 .....	107
5. 2	解析方法 .....	107
5. 3	解析結果 .....	108
5. 3. 1	$B/D=2$ 断面の強制加振時の非定常空気力 .....	108
5. 3. 2	並進 1 自由度弾性支持された $B/D=2$ 断面の解析 .....	112
5. 3. 3	周期的再付着型断面の応答 .....	123
5. 3. 4	$B/D=4$ 断面の強制加振時の非定常空気力 .....	123
5. 3. 5	並進 1 自由度弾性支持された $B/D=4$ 断面の解析 .....	135
5. 4	結論 .....	136
	参考文献 .....	137
第6章 ねじれ 1 自由度空力振動予測への適用性の検討 .....		139
6. 1	概要 .....	139
6. 2	実験方法 .....	140
6. 3	実験結果 .....	141
6. 3. 1	種々の辺長比のねじれ振動の発現風速 .....	141
6. 3. 3	$B/D=2$ 断面のねじれの渦励振 .....	145
6. 3. 4	$B/D=2$ のねじれの発散振動 .....	146
6. 4	$k-\epsilon$ モデルの適用性の検討 .....	147
6. 4. 1	$B/D=2$ 断面のねじれ強制加振時の非定常空気力 .....	147
6. 4. 2	$B/D=2$ 断面のねじれ自由振動時の解析結果 .....	155
6. 4. 3	$B/D=4$ 断面のねじれ強制加振時の非定常空気力 .....	162
6. 4. 4	ねじれ 1 自由度弾性支持された $B/D=4$ 断面の解析 .....	163
6. 5	結論 .....	179
	参考文献 .....	180
第7章 付着型断面および平板の空気力評価への適用性の検討 .....		181
7. 1	概要 .....	181
7. 2	扁平六角形断面 .....	181
7. 2. 1	実験結果 .....	181
7. 2. 2	解析結果 .....	185
7. 3	平板空気力による検証 .....	186



7. 4 結論 .....	189
参考文献 .....	190

第 8 章 結論および今後の課題 .....	191
------------------------	-----

本論文に関連した文献

謝 辞

## 第1章 序論

### 1. 1 本研究の背景

矩形断面は高層建築物や橋梁等の構造物に見られる基本的な断面形状であり、その空力性状を詳しく調べることはこれら構造物の空力設計にとって重要である。矩形断面は非流線型であるため、断面前縁から剥離したせん断層と後流渦の挙動が流体力発生的主要原因となる。断面前縁から剥離したせん断層や、後流に放出される渦の挙動は断面辺長比により異なるため、抗力係数、揚力係数および放出渦の周期性を表わす Strouhal 数は、断面辺長比  $B/D$  ( $B$ : 流れ方向の長さ,  $D$ : 見つけ幅) により複雑に変化することが知られている。

これらの空力特性を把握しようとする場合に用いられている流体解析手法は大別して Navier-Stokes 方程式をそのまま扱う方法 (direct simulation) となんらかの平均化を施した平均化 Navier-Stokes 方程式を扱うものに分けられる。現在のところ後者はさらに、subgrid scale モデルと RANS(Reynolds averaged Navier-Stokes equation) モデルによる方法に分類される。ところで、direct simulation および subgrid scale モデルを用いる方法はいずれも 3 次元解析であり、流れと直角となる断面軸方向に格子分割を行う必要がある。これらの手法で得られる結果は、十分な空間解像度が保証された場合においてのみ有意であるため、一般に多くの記憶容量や計算時間を必要とする。特に空力弾性振動の評価のような場合では、確率統計量が一定になるまでに無次元時間で数百からの解析を行う必要があり、さらに無次元風速および質量減衰比等の構造パラメータを種々に変える必要もあり、3 次元解析によってこれらをパラメトリックに行うことは実用的にはかなりの負荷とならざるをえない。

それに対して RANS モデルによる方法は、高 Reynolds 数域においても 2 次元解析を行うことができる。これはスパン方向変動を均質 (homogeneous) な乱流と仮定すると、スパン方向平均とアンサンブル平均は等価であるとみなすことができることによる。

ところで RANS モデルは元来、乱流場の定常解を求める目的のために開発された手法であり、bluff body の空力問題のように Karman 渦放出のような非定常な流れを伴う問題への適用は緒についたばかりである。このような方面への取り組みは Franke & Rodi(1991)<sup>1)</sup> による研究を機に、次第に関心が高まり、Kato-Launder モデル (1993)<sup>2)</sup> や、近年の非線形渦粘性モデルなどの新しいモデルの開発により、非定常な渦放出の再現も可能となるに至った。その一方、その適用は未だに  $B/D=1.0$  の矩形断面柱に限られており、しかもそれらの研究における大部分の関心は数値解析手法の numerical な側面に注がれている。しかし、断面辺長比の変化に伴い Strouhal 数の変化に不連続が見られるなど、矩形断面柱には数値解析的観点から検証すべき多くの現象が内在している。現状の RANS モデルがこれらの多様な現象に関してどの程度まで再現性を有するかを検証することは RANS モデルの風工学の空力的な諸問題への適用を考えると

き、必要不可欠であると考えられる。

以下本研究では、RANS モデルとして 2 方程式型モデルである修正型  $k-\epsilon$  モデルを取り上げ、一様流中にある断面辺長比  $0.6 \leq B/D \leq 8.0$  の矩形断面柱の空力特性を対象に、 $k-\epsilon$  モデルの適用性について検討する。さらにこれら静止矩形断面柱の空力特性評価における適用性の結果をふまえ、 $k-\epsilon$  モデルの空力弾性振動問題への適用性について検証する。

本研究の構成は以下のようになっている。

第 1 章では矩形断面柱の空力弾性振動に関する既往の研究概要および数値流体解析の適用例について述べる。

第 2 章では数値解析方法について示す。基礎方程式系の導出、それらの一般座標系による定式化、乱流モデルの取り扱い等に関して詳細に述べる。

第 3 章では、修正型  $k-\epsilon$  モデルを取り上げ、矩形断面のようなはく離を伴う現象を精度よく再現するための解析法について論じる。またその方法により静止矩形断面柱の空力特性を種々の辺長比にわたって調べる。特に Strouhal 数の不連続性に代表されるような矩形断面の辺長比の変化に伴う一連の空力特性の変化が再現されるかどうかについて論じる。

第 4 章では乱流モデルを用いない 2 次元解析を示す。この場合移流項に適切な高次風上差分を用いることで  $B/D=2.0$  の前縁はく離渦による渦励振が再現される例を示す。しかし高無次元風速域におけるギャロピングは精度よく再現されないことを示し、スパン方向の運動量輸送を無視したこのような 2 次元解析では、現象再現には限界があることを示す。

第 5 章では並進 1 自由度の空力弾性振動について論じる。完全はく離型として  $B/D=2$  断面をとりあげる。そして解析により  $B/D=2.0$  断面に特徴的な振動形態、すなわち前縁はく離渦による渦励振、Karman 型渦励振およびギャロピングの再現性に関して検討を行なう。また、周期的再付着型断面として  $B/D=4$  断面をとりあげ、複数の渦励振が再現されることを示す。これらの結果を通して第 4 章で論じたような乱流モデルを用いない 2 次元解析では不可能であり、従来 3 次元解析によってしか予測不可能であったギャロピングに関して本解析手法が有効であり、種々の振動形態に関して適用性があることを示す。

第 6 章では  $B/D=2$  および  $B/D=4$  断面のねじれ 1 自由度の空力弾性振動に関して論じる。ねじれ 1 自由度の強制加振の解析を行い、非定常空気力および非定常風圧分布について既往の研究成果と比較を行う。次にねじれの渦励振とねじれフラッターに関して解析を試みる。また、解析の検証のために行った風洞実験結果について述べる。

第 7 章では矩形断面以外の断面形状に対する適用性を論じる。有効性を検証する意味で 2 つの例を論じる。その第一として扁平六角形断面のねじれの渦励振に関する発振風速および応答の定量的評価に対する検討を行うことを通して付着型断面の空力振動再現への適用性を検討す

る。第二に連成空気力の再現性に関して調和振動時の平板空気力について振動翼理論との比較を行う。

最後に第 8 章では本研究の結論と今後の課題について述べる。



## 1. 2 矩形断面柱の空力弾性振動に関する既往の研究概要

### 1. 2. 1 矩形断面柱の空力特性の辺長比による分類

矩形断面は構造物を代表する断面であり, その空力性状は辺長比 $B/D$ によって系統的に詳しく調べられている. その分類を示したのが図1. 1である<sup>3)</sup>. 前縁からはく離するはく離せん断層の側面への再付着のしかたによって $B/D \leq 2.8$ までは完全はく離型,  $2.8 < B/D < 6$ は周期的再付着型,  $B/D > 6$ は定常的再付着型とよばれる. 静止状態のはく離せん断層の再付着性状によるこの分類は振動状態においても種々の示唆を与えるものである. 同図および図1. 2には振動時の分類を示す<sup>4)</sup>. 完全はく離型では限定振動である Karman 型渦励振および風速の増加とともに発散的な振動挙動を示すギャロピングが生じる. 周期的再付着型では並進およびねじれに関して1せん断層不安定型の渦励振(前縁はく離型, 自己励起型渦励振, 低風速励振ともよばれる)およびねじれに関して発散的な振動であるねじれフラッターを生じる. 定常的再付着型では1せん断層不安定型の渦励振と発散振動である連成フラッターが生じる.

### 1. 2. 2 並進振動

#### 1. 2. 2. 1 Karman 型渦励振

Karman 渦による並進の渦励振は完全はく離型断面に見られる. 円筒の Karman 型渦励振には古くから多くの研究がある. そのモデル化に関していくつかの試みがなされている. 田村<sup>5-7)</sup>は後流非線形振動子モデルにより, 2次元円筒の渦励振を極めてよく表現した.

正方形角柱の渦励振に関して, Parkinson and Wawzonek(1981)<sup>8)</sup>は種々の質量減衰パラメータに関して風洞実験を行った. そして小さな質量減衰パラメータでは渦励振がおさまることなくそのままギャロピングへと移行する場合があること, そしてそれは準定常理論では予測できないことを示した. Tamura and Shimada(1987)<sup>9)</sup>は円筒について適用した非線形後流渦振子モデルを, 準定常空気力を取り込むことにより正方形角柱に対して適用した. 図1. 3には同モデルによる非定常空気力の速度同相成分を示す. 同モデルは複雑な変化をよく捕らえることができる. 図1. 4には弾性支持された2次元正方形角柱の応答に対する同モデルの適用結果を示す. 質量減衰パラメータが小さい場合, 渦励振からそのままギャロピングへ移行している性状が捕らえられている.

#### 1. 2. 2. 2 1せん断層不安定型渦励振

1せん断層不安定型渦励振は1970年代後半から1980年代前半にかけて精力的に研究され, その発生風速や励振のメカニズムが明らかにされた.

Washizu et al.(1978)<sup>10)</sup>は $B/D=2$ および $B/D=4$ の断面に関して, 強制加振実験(図1. 8)を行い, 非定常空気力を測定し, Karman 渦とは異なる励振力による振動の励起があることを示

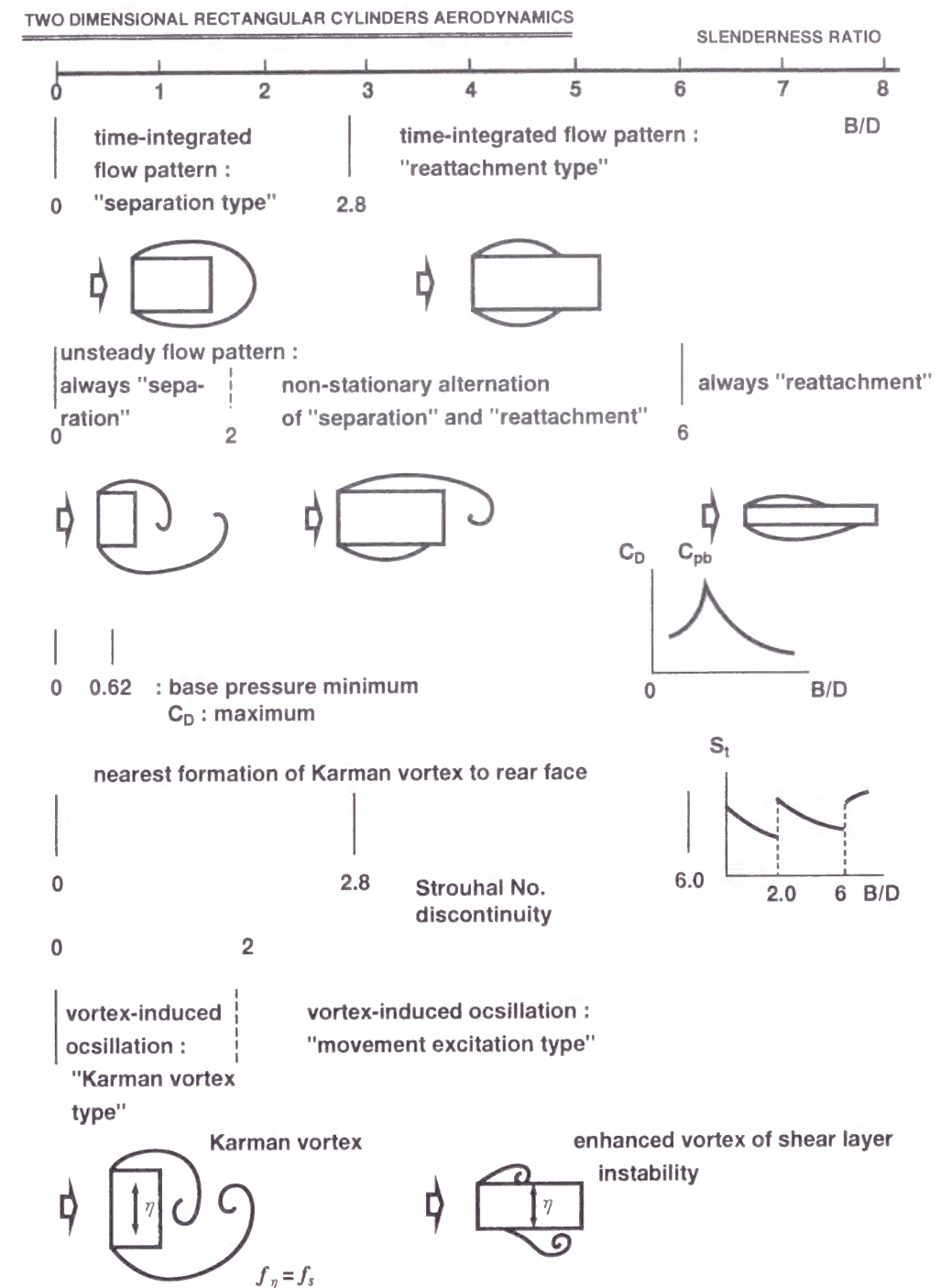


図1. 1 2次元矩形断面柱の空力性状模式図<sup>3)</sup>

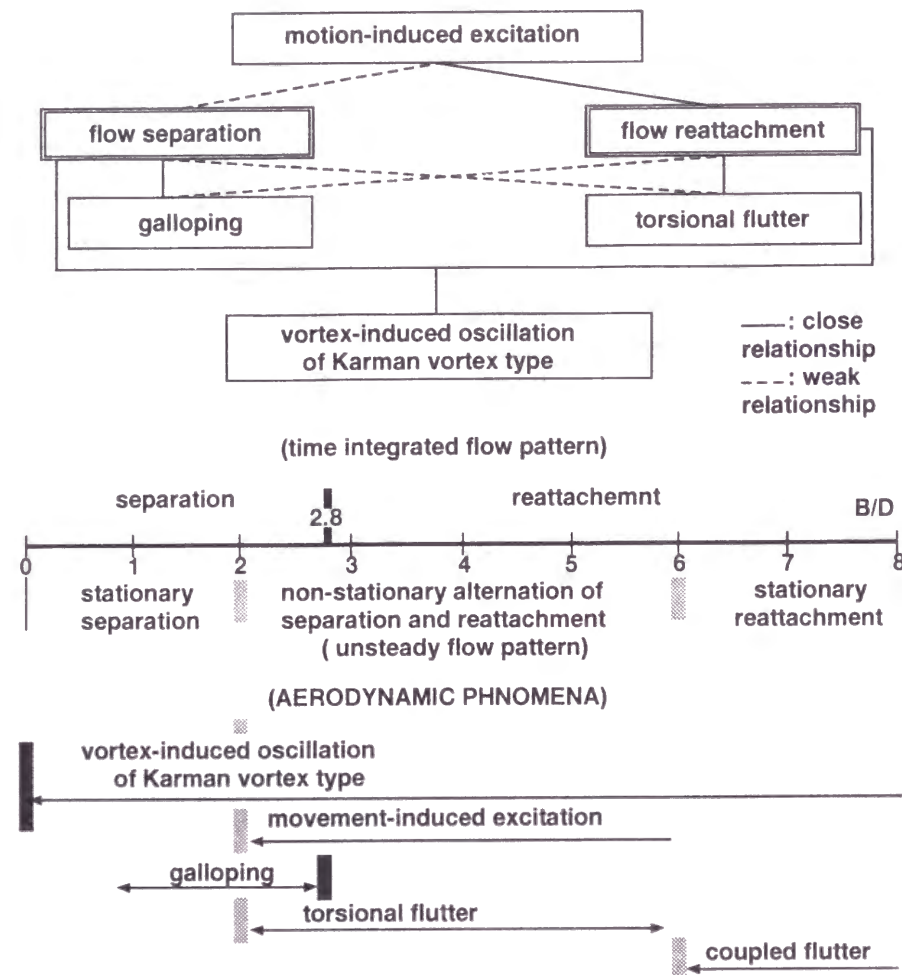


図 1. 2 2次元矩形断面柱の空力弾性振動模式図<sup>4)</sup>

した。

図 1. 5 には完全はく離型断面である  $B/D=2$  と周期的再付着型断面である  $B/D=4$  の場合についてその計測結果を示す。図中、特に励振力となりえる揚力の加振速度同相成分  $CL_I$  に注目するとこれら 2 種類の断面が振動時にもその性格を大きく異にすることがわかる。 $B/D=2$  では高無次元風速時では  $CL_I > 0$  で位相も  $90^\circ$  に近いのに対し  $B/D=4.0$  は  $CL_I < 0$  で位相は  $180^\circ$  である。これらはそれぞれギャロピングの発生とそれがないことを示している。

その後、Komatsu and Kobayashi (1980)<sup>11)</sup> によって低風速域において発生する渦励振の発生メカニズムが前縁はく離渦の断面側面の流下に伴って発生する揚力によるものであることが示された。また Nakamura<sup>12)</sup> はこの現象が本質的には edge-tone であることを指摘した。

白石・松本(1982)<sup>13)</sup> は側面風圧測定、可視化に基づく実験(図 1. 6) や既往の実験や実測により得られた種々の辺長比の断面について系統的に整理し、渦励振の開始風速について、たわみに関しては  $V_{cr}=0.83(B/D)$  および  $V_{cr}=1.67(B/D)$  であること、ねじれに関しては  $(2/3)V_{cr}$ ,  $(2/5)V_{cr}$  ... であることを示した(図 1. 7)。

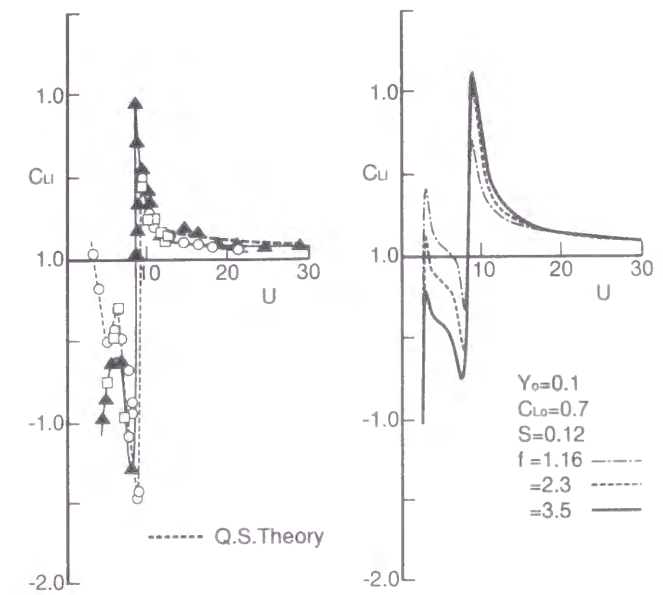


図 1. 3 2次元正方形柱の非定常空気の速度同相成分の実験値と非線形後流渦振子モデルによる予測値の比較<sup>9)</sup>

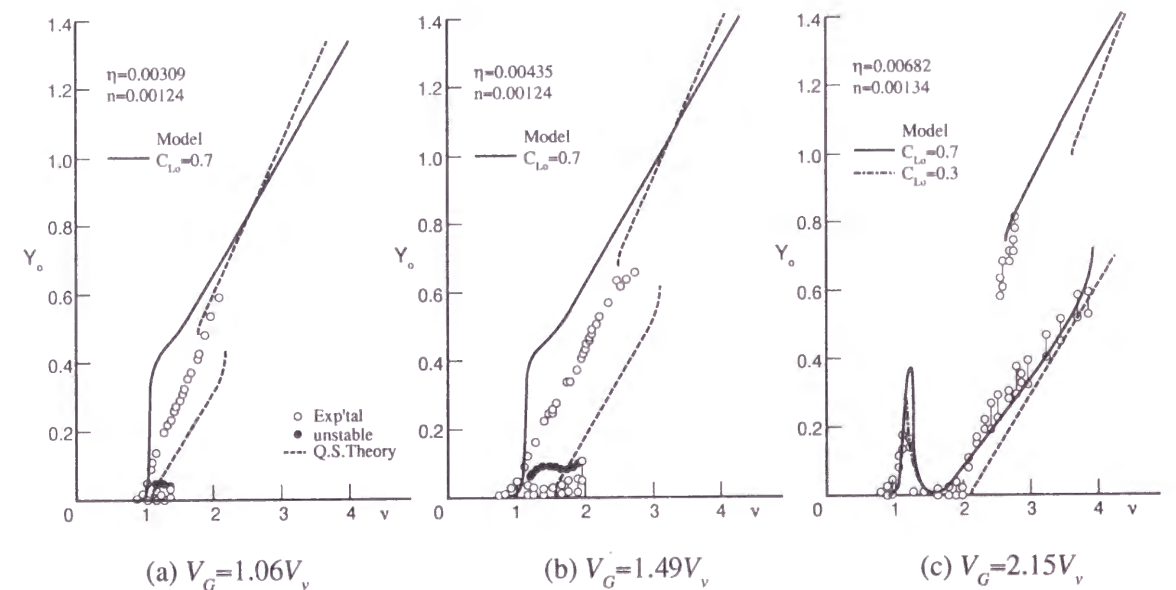


図 1. 4 2次元正方形柱の渦励振とギャロピングの複合現象と非線形後流渦振子モデルによる応答の比較<sup>9)</sup>



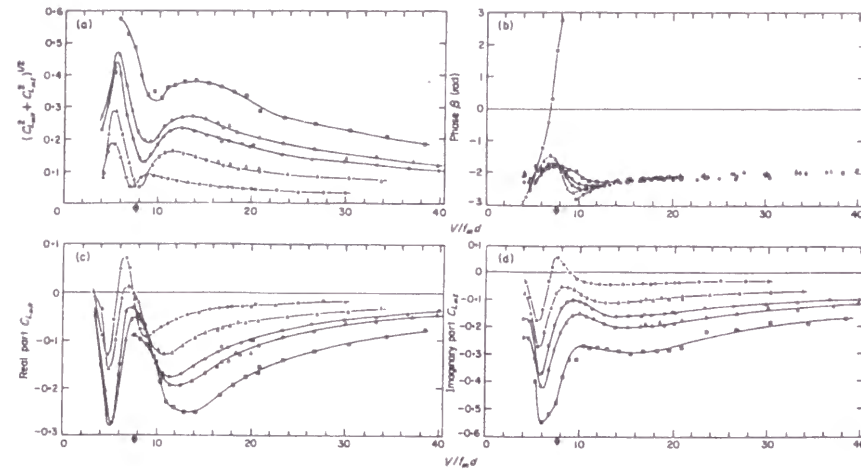


Figure 13. (a)  $(C_{L,m}^2 + C_{D,m}^2)^{1/2}$  vs.  $V/f_m d$ ; (b)  $\beta$  vs.  $V/f_m d$ ; (c)  $C_{L,m}$  vs.  $V/f_m d$ ; (d)  $C_{L,m}$  vs.  $V/f_m d$ .  $c/d = 4$ ,  $h_m$  (mm):  $\bullet$ , 2;  $\Delta$ , 5;  $\circ$ , 8;  $\triangle$ , 10;  $\square$ , 15.

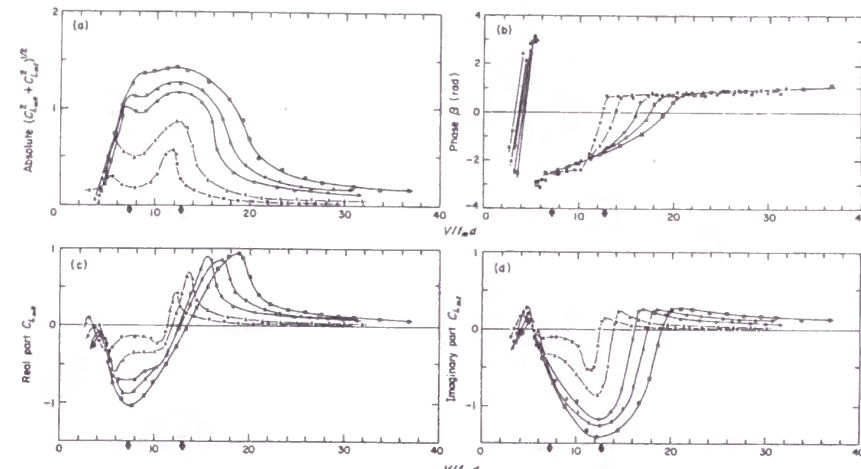


Figure 11. (a)  $(C_{L,m}^2 + C_{D,m}^2)^{1/2}$  vs.  $V/f_m d$ ; (b)  $\beta$  vs.  $V/f_m d$ ; (c)  $C_{L,m}$  vs.  $V/f_m d$ ; (d)  $C_{L,m}$  vs.  $V/f_m d$ .  $c/d = 2$ ,  $h_m$  (mm):  $\bullet$ , 2;  $\Delta$ , 5;  $\circ$ , 10;  $\triangle$ , 15;  $\square$ , 20.

図 1. 5 矩形断面柱の並進の非定常空気力係数の加振振幅による変化  $B/D=2$  および  $B/D=4^{10)}$

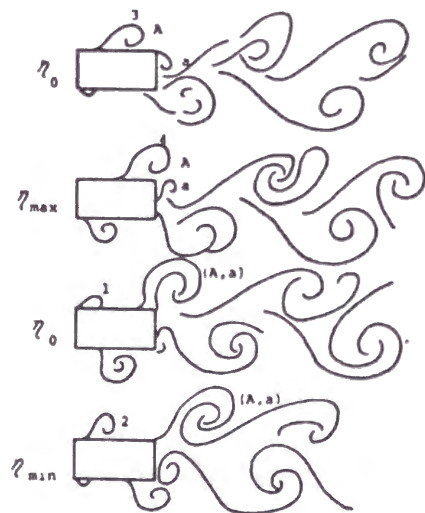


図 1. 6 1 せん断層不安定型渦励振の渦放出過程<sup>13)</sup>

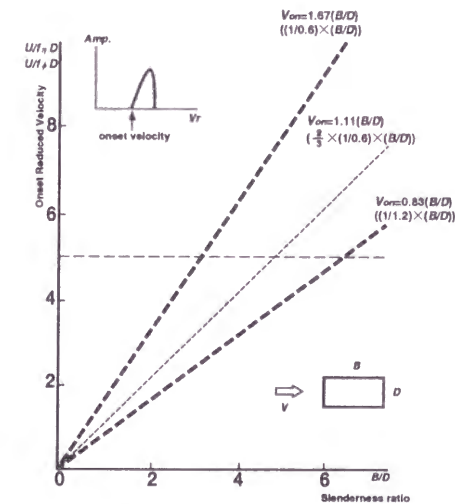


図 1. 7 2 次元矩形断面柱の 1 せん断層不安定型渦励振の開始風速と辺長比の関係<sup>13)</sup>

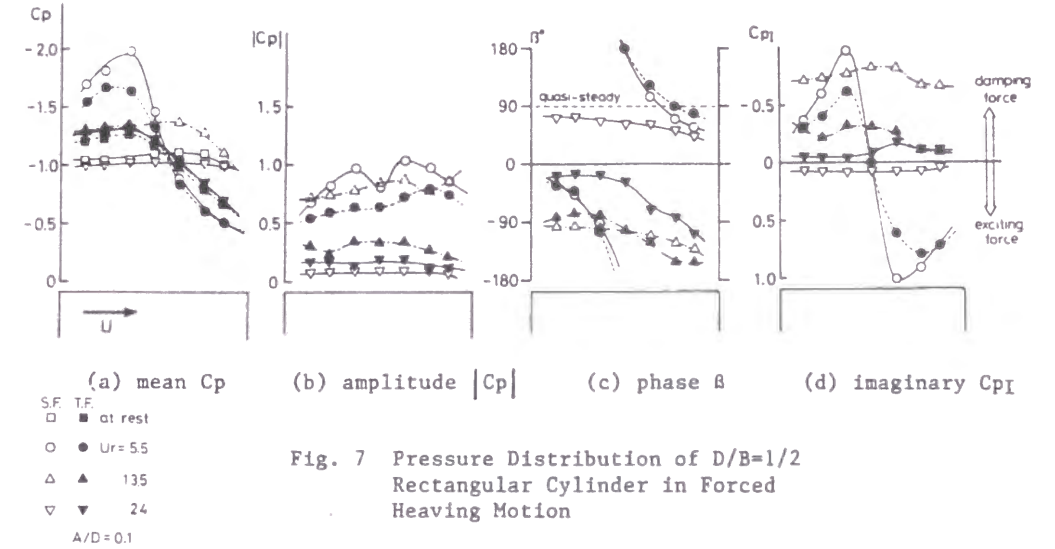


Fig. 7 Pressure Distribution of  $D/B=1/2$  Rectangular Cylinder in Forced Heaving Motion

図 1. 8 矩形断面柱の並進の非定常風圧力分布の加振振幅による変化  $B/D=2^{14)}$

Miyata et al.(1983)<sup>14)</sup>は強制加振により側面の非定常風圧力を測定し、励振のメカニズムを明らかにした(図 1. 8)。同図(d)には  $B/D=2.0$  の場合の速度同相成分を示すが、渦励振時では側面の風上部は減衰力として、風下部は励振力として寄与していること、またギャロピング時では側面全体にわたり励振力となることが明らかにされた。

### 1. 2. 3 ねじれ振動

鷲津ら(1976)<sup>15)</sup>は並進の項において述べたと同様な強制加振実験により、ねじれの場合についても非定常空気力を計測している(図 1. 9)。図には  $B/D=2.0$  と  $B/D=4.0$  の場合を示す。完全離型である  $B/D=2$  と周期的再付着型の  $B/D=4$  ではその様相が大きく異なることがわかる。 $B/D=4.0$  の場合、低無次元風速で励振モーメントとなる可能性を示した後、無次元風速の増加とともに単調に励振モーメントも負から正に変化する。一方、 $B/D=2.0$  は  $B/D=4.0$  のような単調な変化は示さない(図 1. 9 b)。

Miyata et al.<sup>14)</sup>はねじれに関しても非定常風圧分布を計測している(図 1. 10)。渦励振が生じる  $U_r=6$  では側面の風下部の励振モーメントが大きいこと、ねじれの発散振動が発現する可能性がある  $U_r=14$  では側面の風上部は減衰モーメントに、風下部は励振モーメントとなることを示している。

吉村ら(1986)<sup>16)</sup>は種々の辺長比を有する矩形断面柱のねじれモードの渦励振の発生風速について考察した(図 1. 11)。そして異なる励振のタネに起因する 6 つのグループの渦励振が発生することを明らかにした。すなわち、完全離型、周期的再付着型および定常的再付着型の Karman 渦励振、impinging-shear-layer instability の第 1 と第 2 の高調波に起因する渦励振、ならびに impinging-shear-layer instability の基本波の渦との分数調波共振と思われるものの 6 つ



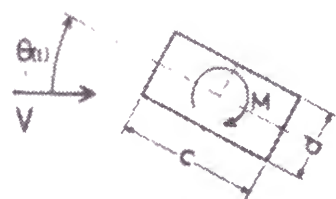
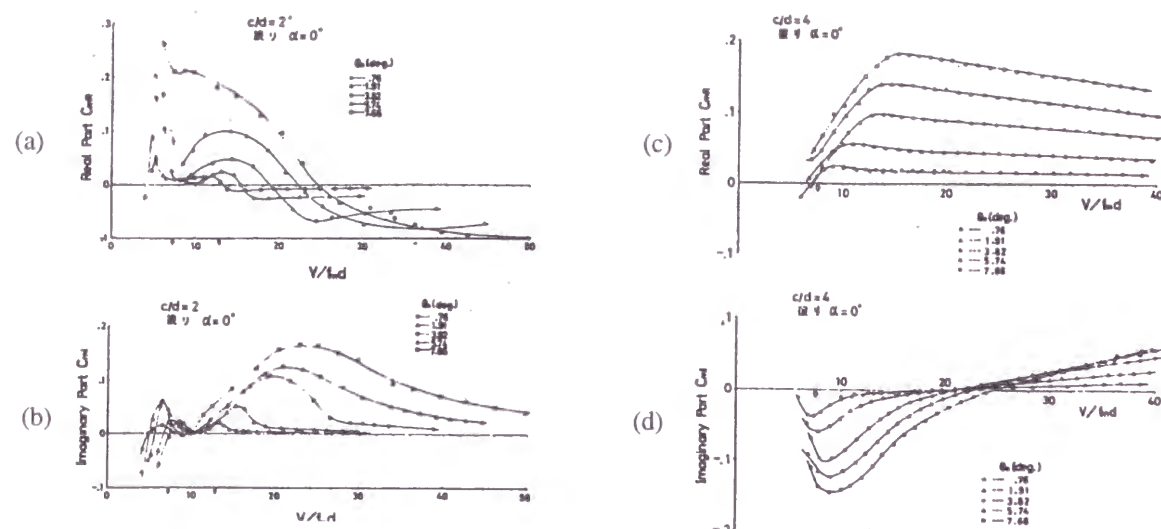


図1.9 矩形断面柱のねじれの非定常空気力係数の加振振幅による変化 (a)  $B/D=2$   $CM_R$ , (b)  $B/D=2$   $CM_I$ , (c)  $B/D=4$   $CM_R$ , (d)  $B/D=4$   $CM_I$  <sup>15)</sup>

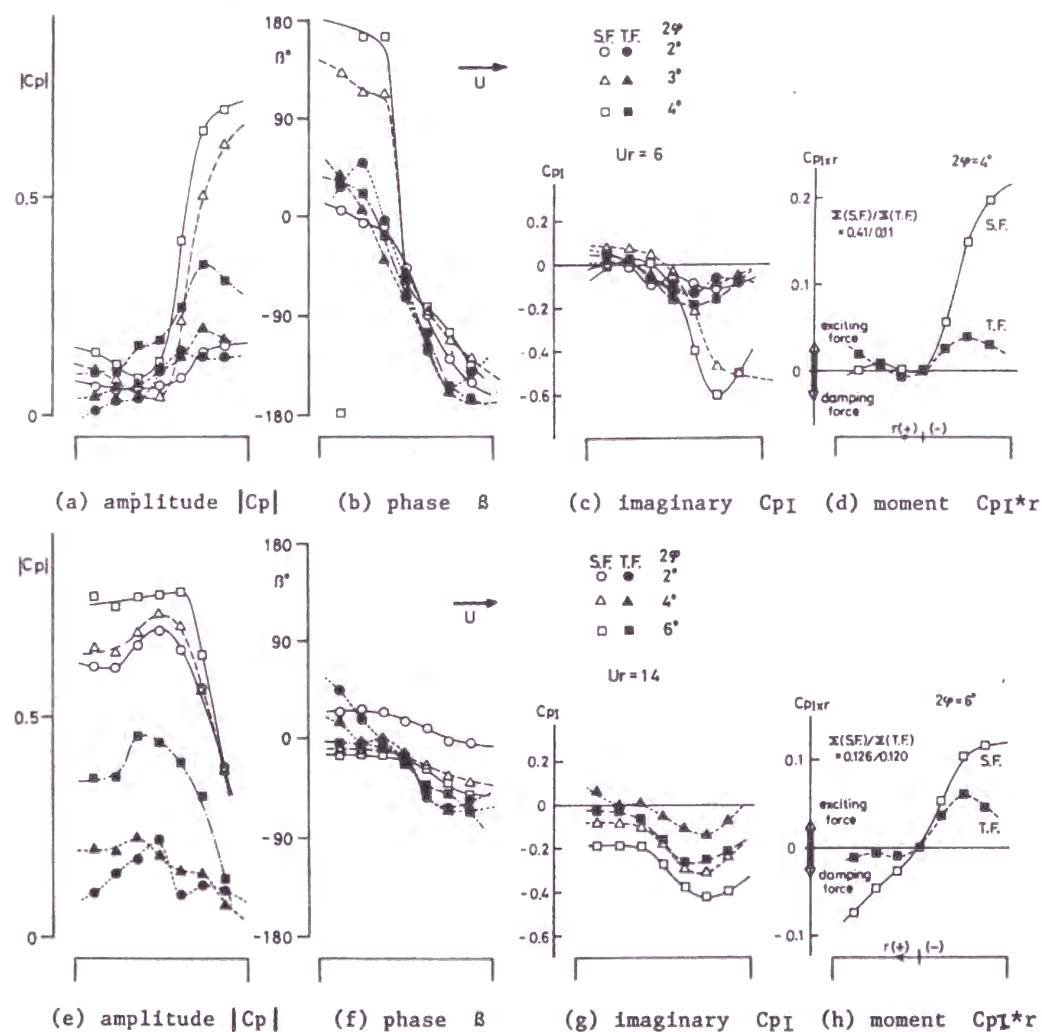


図1.10 矩形断面柱のねじれの非定常風圧力分布の加振振幅による変化  $B/D=2$  <sup>14)</sup>

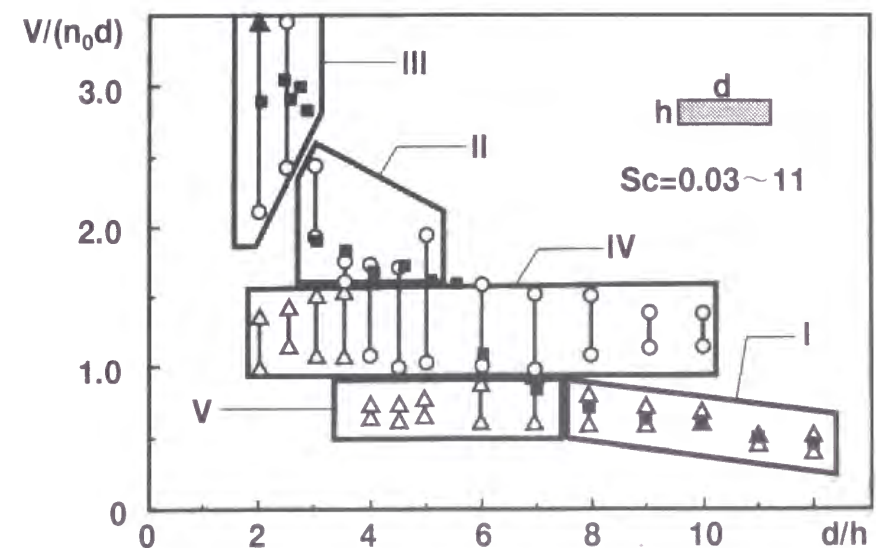


図1.11 矩形断面柱のねじれの渦励振発生風速域 <sup>16)</sup>

である。

久保・加藤ら<sup>17,18)</sup>は種々の辺長比のH型断面について考察を行い、曲げ振動とねじれ振動、渦励振とねじれフラッターはその発生メカニズムにおいて本質的には同じ現象である(剥離渦励振)という考え方にたつて、それらの振動の発現のしかたを説明している。すなわち風速の変化に対して、物体表面上の渦の個数は変化し、低い風速ほど多くの渦が存在し、高い風速ほど少ない渦が存在する。そして上下面で同数の渦の配置が生じる場合にはねじれ振動が発生し、上下面で渦の個数が1個差がでる場合には曲げ振動が発生する。これを換算風速で整理した場合(換言すれば、曲げの固有振動数とねじれの固有振動数とが同一の場合)、風速の上昇に対してねじれ振動と曲げ振動とが交互に現れる(図1.12)。

Nakamura et al.<sup>19)</sup>は  $B/D=0.75$  から  $B/D=5.0$  までの種々の辺長比の矩形断面柱に作用す

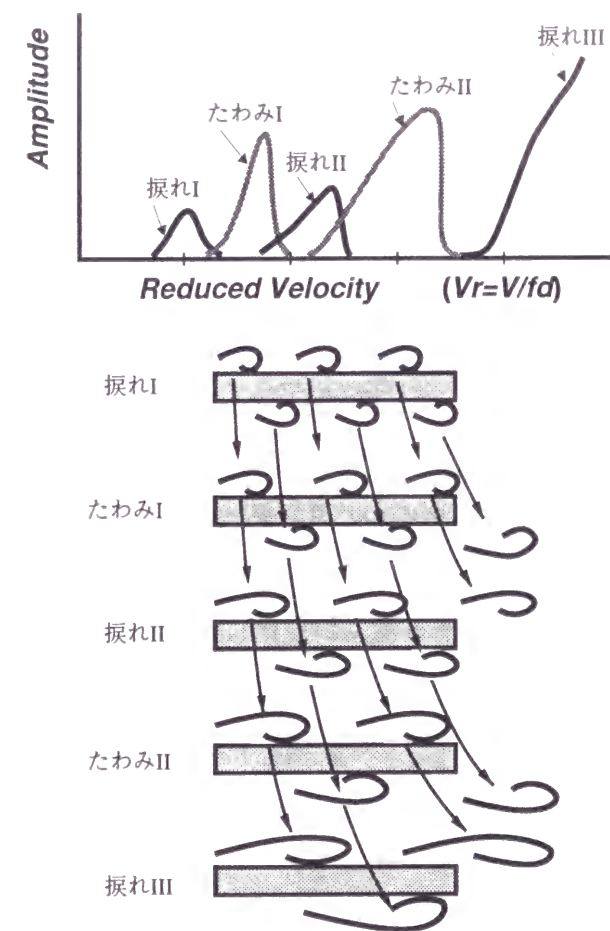


図1.12 剥離渦励振の発生機構の概略 <sup>18)</sup>

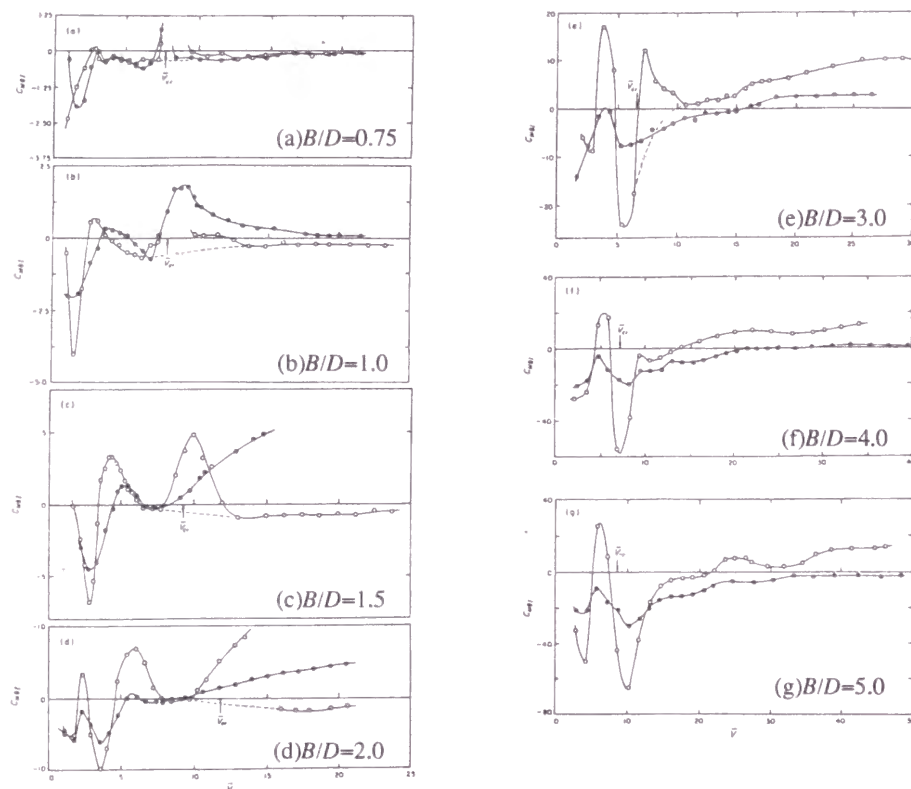


図 1. 13 矩形断面柱の  $C_{M0i}$  と無次元風速の関係<sup>19)</sup>; ○—様流, ●—乱流

る非定常空力モーメントを示している (図 1. 13).  $B/D=2.0$  の場合 (図 1. 13 d),  $Vr>16$  では  $C_{M0i}$  は負になっており一転して減衰力になっている. このことは鷲津らによっても示されており,  $B/D=2.0$  で見られる限定型ねじれフラッターの可能性を示しているものと考えられる.

$B/D=2.0$  断面のねじれ振動時の風圧分布に関しては松本ら(1997)<sup>20)</sup>は  $Ur=10$  付近を境にその励振モーメントに対する役割が変化していることを示している.

ねじれフラッターが発生する断面では風速の増加とともに  $A_2^*$  が負から正に変化する (図 1. 14). それに対し, 連成フラッターが発生する比較的偏平な断面は  $A_2^*$  は正とはならないため, 連成項の役割が重要である. 松本ら(1996)<sup>21)</sup>は各非定常空力係数の役割に関して詳細な検討を行なうこと

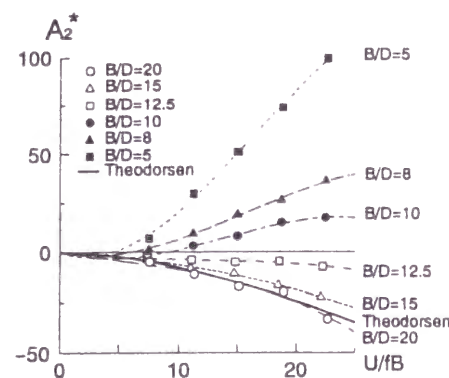


図 - 2 非定常空力係数  $A_2^*$

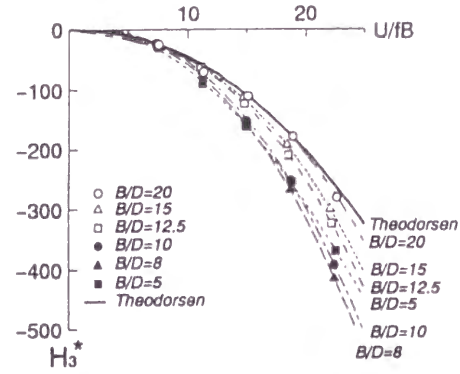


図 - 3 非定常空力係数  $H_3^*$

図 1. 14 非定常空力係数<sup>20)</sup>  
(a)  $A_2^*$ , (b)  $H_3^*$

を通してフラッター安定化対策を提案している<sup>21)</sup>. また, ねじれフラッターと連成フラッターとでは各振動自由度間での空力係数の大きさがちがうだけであり, 本質的には同じものであるとしている.

#### 1. 2. 4 基本矩形断面柱の空力弾性振動に関する既往の数値解析的研究

本節では 2 次元断面柱の空力弾性振動に関する既往の数値解析的研究のうち, 特に近年に発表されたものに関してその概要を述べる.

田村らは, 高 Reynolds 数領域におけるはく離渦を伴った現象のを再現するためにはスパン方向の運動量輸送を再現する必要がある, これを再現するためには 3 次元解析が不可欠であるという主張から一貫して 3 次元解析を行っている.

Tamura(1999)<sup>22,23)</sup>は 3 次精度風上差分を用いた 3 次元疑似 direct simulation により  $B/D=2.0$  の矩形断面に関して  $Ur=25$  までの解析を行い, 動力学のパラメータの違いによる応答性状の変化を再現した (図 1. 15).

田村・伊藤(1998)<sup>23)</sup>は辺長比が抗力係数の臨界面付近の  $0.2 \leq B/D \leq 0.8$  の非常に bluff な断面について解析を行っている. この場合, 抗力変動には High drag mode と Low drag mode が間歇的に現れる. 図 1. 16 には解析によって得られた各種空力特性に関する実験値との比較を示す. 空力特性を見る限り, このような非常に bluff な断面に関しては現状の 3 次元解析でもなお十分にはその性状を捕えきれてはいないといえる.

RANS モデルによる解析では, 2 次元解析

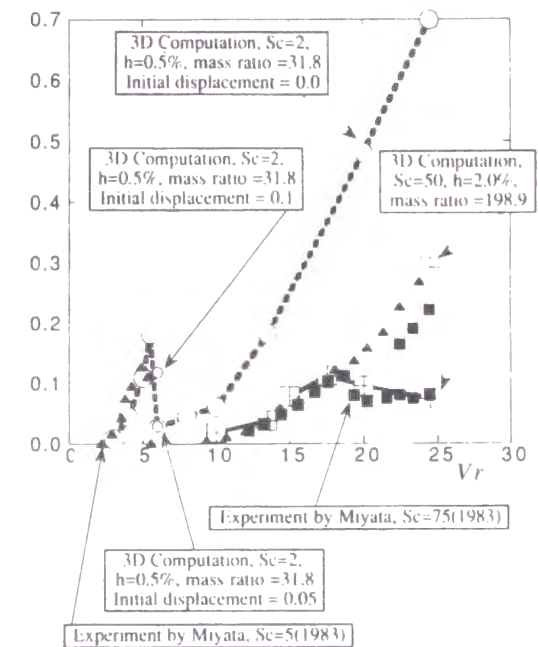


図 1. 15 3 次精度風上差分を用いた 3 次元疑似 direct simulation による  $B/D=2$  の動力学的特性値のちがいによる応答性状のちがい<sup>22)</sup>

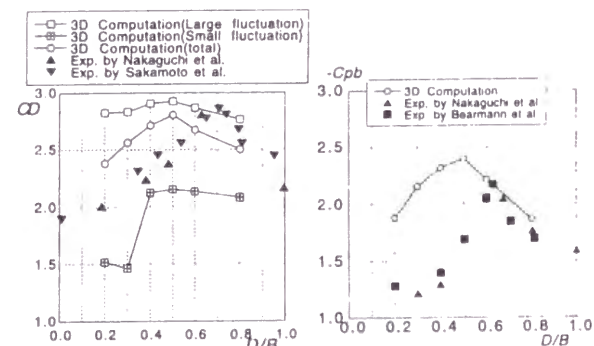


図 7 辺長比が変化した場合の平均抗力係数の変化

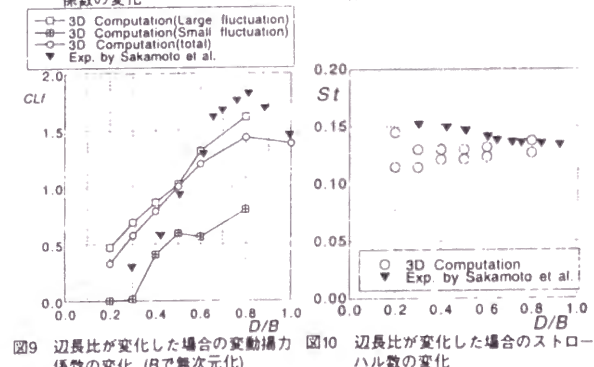


図 9 辺長比が変化した場合の変動揚力係数の変化 (B で無次元化)

図 1. 16 臨界面付近の辺長比を有する矩形断面柱の 3 次元疑似 direct simulation による解析結果<sup>24)</sup>



による解析例が報告されている。加藤(1997)<sup>25)</sup>は Kato-Launder モデル<sup>4)</sup>を用いて正方形角柱の渦励振を解析した(図 1. 17)。  $Sc=2M\delta/\rho D^2=9.98$  および 34.4 の 2 つの異なる Scruton 数について解析を行い、小さな Scruton 数では渦励振はギャロピングへ移行することを示した。解析格子点数は  $76 \times 64$  という比較的粗い格子点配分にも関わらず極めてよい一致を示している。

Kim (1999)<sup>26)</sup>は RNG  $k-\epsilon$  モデルを用いて正方形角柱について解析を行っている。非常にスムーズな渦放出が得られ、抗力係数も実験値に近い。

小垣ら(1996)<sup>27)</sup>は正方形角柱に関する Large Eddy Simulation (LES) を行っている。SGS モデルとして標準 Smagorinsky モデルを用いている。壁面近傍の渦粘性の過大な生成を補正するために van Driest 形 wall damping function を乗じている。有限体積法で離散化し、対流項には QUICK を用いている。時間進行法は HSMAC 法に準じ、対流項には 2 次精度 Adams-Bashforth 法、その他の項には Crank-Nicolson 法を適用し  $\Delta t=0.002$  としている。解

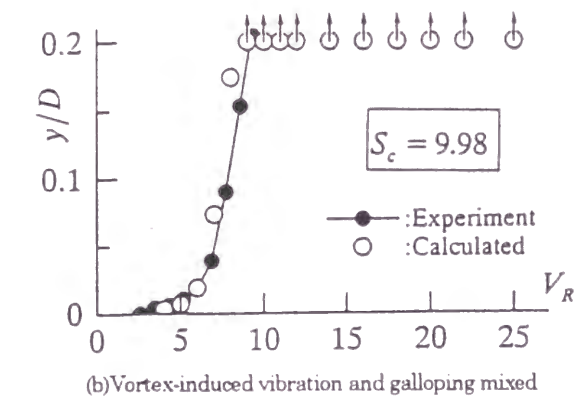
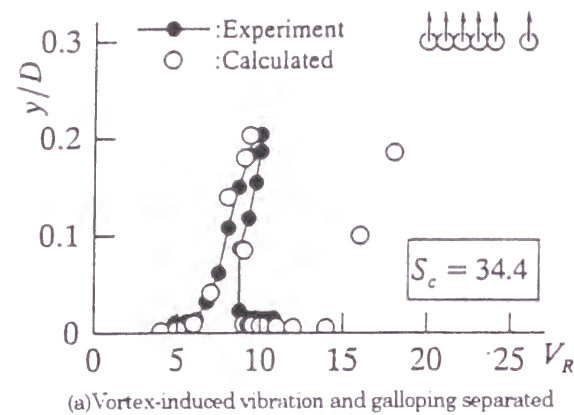
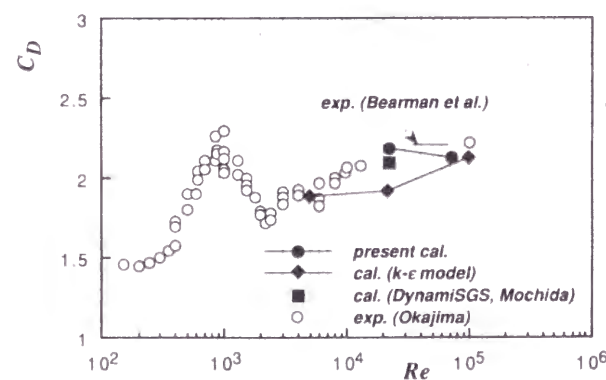
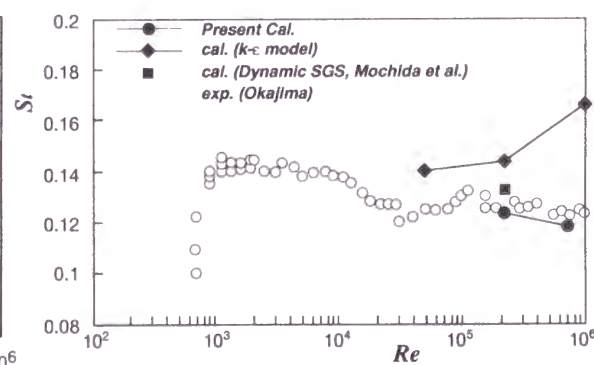


図 1. 17 Kato-Launder モデルによる  $B/D=1$  の動力学特性値のちがいによる応答性状のちがい<sup>25)</sup>



(a) 抗力係数



(b) Strouhal 数

図 1. 18 LES および  $k-\epsilon$  モデルによる正方形型断面柱の解析結果の比較<sup>27)</sup>

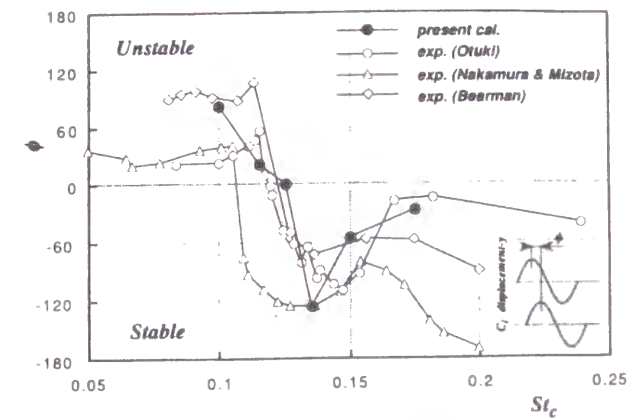


図 7: 振動角柱に働く揚力の位相変化、振動振幅:  $A/H = 0.1$

(c) 強制加振時の加振変位と揚力の加振振動数成分の位相差

図 1. 18 LES および  $k-\epsilon$  モデルによる正方形型断面柱の解析結果の比較<sup>27)</sup>

析格子点数は  $83 \times 63 \times 11=54,054$  である。図 1. 18 には抗力係数および Strouhal 数の解析結果と実験結果の比較を示す。小垣らの結果は少ない格子点数にも関わらずよい一致を示している。同図中には Kato-Launder モデルを用いた  $k-\epsilon$  モデルによる結果も示されている。壁面には  $1/7$  乗則を、 $k$  と  $\epsilon$  の対流項には 1 次精度風上差分を用いている他は LES の計算と同じ解析法である。小垣らの結果によれば  $k-\epsilon$  モデルによる結果は Strouhal 数は大きめに、抗力係数

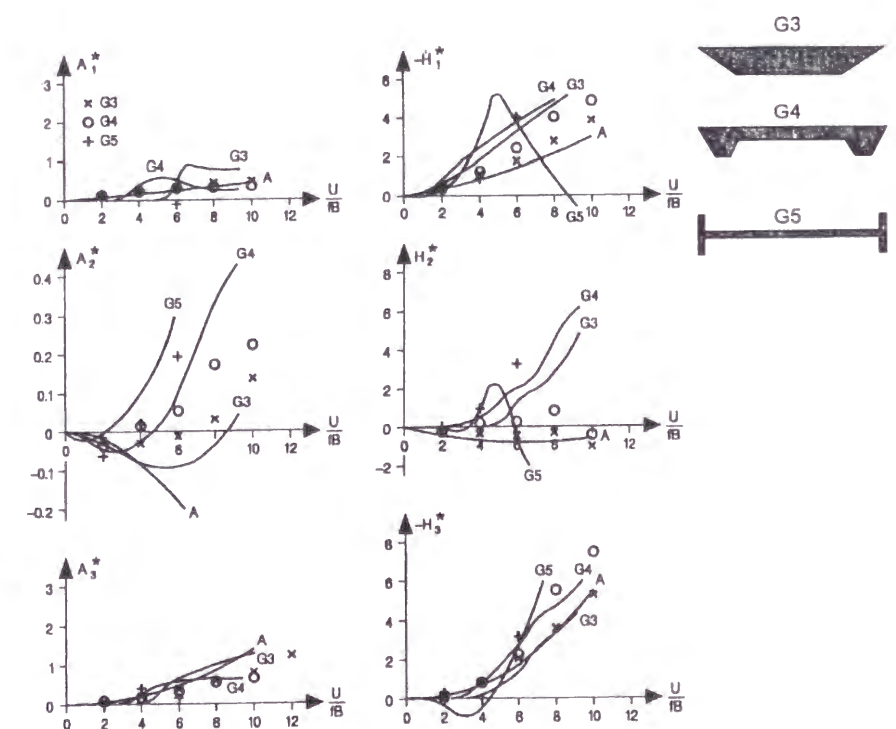


Fig. 7. Comparison of aerodynamic derivatives obtained from discrete vortex simulations to aerodynamic derivatives obtained from wind tunnel tests. Sections G3, G4 and G5.

図 1. 19 DVM FLOW による種々の橋梁断面形状の非定常空気力<sup>32)</sup>

は小さな結果となっている。また小垣らはLESによりまた強制加振時に働く揚力の位相変化についても解析を行っている(図1.18c)。渦励振が生じる付近で位相が急変している様子がよく捕らえられている。

近年では渦法による扁平断面の解析も行われている。Larsen et al.<sup>28-32)</sup>はさまざまな形状の箱桁断面やH型断面に関して解析を行っている(図1.19)。図1.20にはH型断面の非定常空気力係数 $A_2^*$ の変化を既往の実験結果とともに示す。

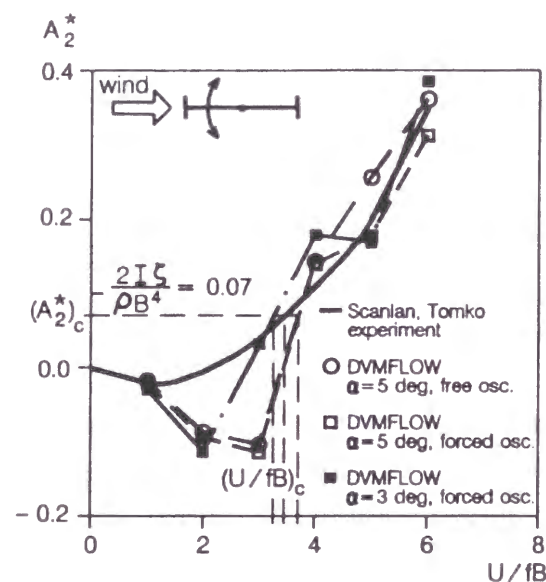


図1.20 DVM FLOWによるH型断面の非定常空気力の比較<sup>32)</sup>

## 参考文献

- 1) Franke, R. and Rodi, W. : Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models, *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, 20-1, Technical University of Munich, 1991.9
- 2) Kato, M. and Launder, B. E. : The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders, *Ninth symposium on "Turbulent shear flows"* Kyoto Japan, 1993.8
- 3) 松本勝：構造基本断面の空力特性（その2）5. 動的空気特性 矩形断面の限界辺長比, 日本風工学会誌, 第38号, pp.114, 1989.1
- 4) Takeuchi, T. and Matsumoto, M. : Aerodynamic response characteristics of rectangular cylinders in tandem arrangement, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 41-44, pp.565-575, 1992
- 5) 田村幸雄：円筒の渦励振に関する研究 その1 円筒後流域のモデル化, 日本建築学会構造系論文集, 第266号, pp.87-95, 1979
- 6) 田村幸雄：円筒の渦励振に関する研究 その2 渦励振現象のモデル化, 日本建築学会構造系論文集, 第280号, pp.67-77, 1979
- 7) 田村幸雄：円筒の渦励振に関する研究 その3 連続体の渦励振モデル, 日本建築学会構造系論文集, 第337号, pp.65-72, 1984
- 8) Parkinson, G. V. and Wawzonek, M. A : "Some considerations of combined effects of galloping and vortex resonance", *J. of Wind engineering and Industrial Aerodynamics*, 8, pp.135-143, 1981
- 9) Tamura, Y. and Shimada, K. : A mathematical model for the transverse oscillations of square cylinders, *Proc of International Conference on Flow Induced Vibrations*, Bowness-Windermere, England, 12-14, 1987, PAPER F4, 267-275
- 10) Washizu, K., Ohya, A., Otsuki, Y. and Fuji, K. : Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode, *J. of Sound and Vibration*, 59(2), p.195-210, 1978
- 11) Komatsu, S. and Kobayashi, H. : Vortex-induced oscillation of bluff cylinders, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 6(1980), 335-362
- 12) Nakamura, Y. and Nakashima, M. : Vortex excitation of prisms with elongated rectangular, H and T cross-section, *J. Fluid Mech.* (1986), vol.163, pp.149-169
- 13) 白石成人, 松本勝：充腹構造断面の渦励振応答特性に関する研究, 土木学会論文報告集, 第322号, 1982.6, 37-50
- 14) Miyata, T., Miyazaki, M. and Yamada, H. (1983) "Pressure distribution measurements for wind induced vibrations of box girder bridges." *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 14, 223-234.

- 15) 鷺津久一郎, 大屋昭男, 大築志夫, 藤井邦雄: 箱型模型の空力弾性特性に関する風洞実験, 構造物の耐風性に関する第4回シンポジウム, 1976, 191-198
- 16) 吉村健, 三宅昭春, 平山智良, 赤松輝雄: 扁平矩形断面柱のねじれの渦励振, 第9回風工学シンポジウム論文集, 1986, 157-162
- 17) 久保喜延, 加藤九州男, 宮地真一: 扁平構造断面柱の発振風速推定式について, 第9回風工学シンポジウム論文集, 1986, 169-174
- 18) 久保喜延: はく離せん断層内の流体を加速するアクティブコントロールによる柔構造物の耐風制振法, 平成2年度科学研究費補助金(一般研究B)研究成果報告書, 平成3年3月
- 19) Nakamura, Y. and Yoshimura, T.: Flutter and vortex excitation of rectangular prisms in pure torsion in smooth and turbulent flows, *J. of Sound and Vibration* (1982) 84(3), 305-317
- 20) Matsumoto, M., Daito, Y., Yoshizumi, F., Ichikawa, Y. and Yabutani, T.: Torsional flutter of bluff bodies, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 69-71 (1997) 871-882
- 21) 松本勝, 小林祐輔, 浜崎博: 構造基本断面における連成フラッターの発生機構に関する研究, 第13回風工学シンポジウム論文集, 359-364, 1994
- 22) Tamura, T.: Reliability on CFD estimation for wind-structure interaction problems, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 81, 1999, 117-143
- 23) 田村哲郎, 伊藤嘉晃, 3次元流体解析による角柱に発生する種々の空力弾性挙動の再現と精度検討, 日本建築学会構造系論文集, 第497号, 25-32, 1997.7
- 24) 田村哲郎, 伊藤嘉晃, 辺長比が小さい角柱の空力特性・空力不安定振動に関する数値的考察, 日本建築学会構造系論文集, 第507号, 35-43, 1998.5
- 25) 加藤真志: 修正生産項  $k-\epsilon$  モデルを用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析, 土木学会論文集, No.577, I-41, p.217-230, 1997.10
- 26) Kim, S.E. and Boysan, F.: Application of CFD to environmental flows, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 81, 1999, 145-158.
- 27) 小垣哲也, 岡島厚, 小林敏雄: ラージエディシミュレーションによる静止および振動角柱周りの乱流数値解析, 日本機械学会論文集(B編), 62巻, 597号, 1996.5, 1716-1724
- 28) Walther, J.H. and Larsen, A.: Two dimensional discrete vortex method for application to bluff body aerodynamics, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 67&68, 1997, 183-193
- 29) Larsen, A. and Walther, J.H.: Aeroelastic analysis of bridge girder sections based on discrete vortex simulations, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 67&68, 1997, 253-265
- 30) Walther, J.H.: Discrete vortex methods in bridge aerodynamics and prospects for parallel computing techniques, *Bridge Aerodynamics*, Larsen & Esdahl(eds), Balkema Rotterdam, ISBN 90 5410 961 0, 1998, 301--325
- 31) Larsen, A.: Advances in aeroelastic analyses of suspension and cable-stayed bridge, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 74-76, 1998, 73-90
- 32) Larsen, A. and Walther, J.H.: Discrete vortex simulation of flow around five generic bridge deck sections, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 77&78, 1998, 591-602
- 33) Larsen, A.: A 1999 view on aeroelastic stability - A driving force in bridge aerodynamics, *Proc. of the International Conference on Wind Engineering*, Copenhagen, Denmark, 21-24 June, Vol1, 55-66, 1999







## 第2章 数値解析方法

### 2. 1 概要

本章では解析方法に関して詳細に述べる。本章全体の構成は、まず本解析で用いる乱流モデルと基礎方程式系について示す。次に一般座標変換に関して述べ、一般座標系によって表した基礎方程式系の導出について示す。最後に時間進行法、空気力の算出方法、格子生成法について述べる。

### 2. 2 平均化 Navier-Stokes 方程式の誘導

Reynolds 平均は時間平均、空間平均およびアンサンブル平均（位相平均）の意味に解釈される。時間平均とした場合はある平均化時間  $T$  を考えたとき  $\bar{\phi}$  は時間平均値、 $\phi'$  はそこからのずれとなる。

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt \quad \phi' = \phi(t) - \bar{\phi} \quad (2.2.1)$$

空間平均ではある平均化ボリューム  $V$  を考え、 $\bar{\phi}$  は空間平均値、 $\phi'$  はそこからのずれとなる。

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V} \int_V \phi(x) dv \quad \phi' = \phi(x) - \bar{\phi} \quad (2.2.2)$$

周期性がある変動におけるアンサンブル平均では、同じ位相の変動を  $N$  サンプル集め、その平均値として  $\bar{\phi}$  が考えられ、 $\phi'$  はそこからのずれとなる。

$$\bar{\phi}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_j(\tau) \quad \phi'(\tau) = \phi(\tau) - \bar{\phi}(\tau) \quad (2.2.3)$$

2つの量に関する Reynolds 平均操作は次ぎに示すようになる。

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}g} &= \bar{f}\bar{g} \\ \overline{\bar{f}g'} &= \overline{\bar{f}(g-\bar{g})} = \bar{f}\overline{(g-\bar{g})} = \bar{f}(\bar{g}-\bar{g}) = 0 \\ \overline{\bar{f}g} &= \overline{(\bar{f}+f')(\bar{g}+g')} = \overline{\bar{f}\bar{g} + \bar{f}g' + \bar{g}f' + f'g'} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

上式中第2式の意味は、平均値とそこからのずれとの相関性を意味しているが、一般に時間平均とアンサンブル平均では上式のごとく無相関が成り立つが、空間平均では必ずしも無相関が成り立つとはかぎらない。

Navier-Stokes 方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.2.5)$$

Navier-Stokes 方程式の Reynolds 平均を考える。

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}} = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}} \quad (2.2.6)$$

$u_i = U_i + u'_i$ ,  $p = P + p'$  とすると,

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial (U_i + u'_i)}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial U_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial t}} = \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (2.2.7)$$

$$\overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial (U_i U_j + u'_i U_j + U_i u'_j + u'_i u'_j)}{\partial x_j}} = \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (2.2.8)$$

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial (P + p')}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (2.2.9)$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.2.10)$$

であるから、平均化 Navier-Stokes 方程式は,

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (2.2.11)$$

となる。またもとの Navier-Stokes 方程式から上式を差し引くと変動 Navier-Stokes 方程式が得られる。

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial (u'_i U_j + U_j u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.2.12)$$

乱流運動による運動量の輸送効果を、分子運動による粘性効果の表示になぞらえて、Bousinessque(1897) は Reynolds 応力を,

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.2.13)$$

と表現した。 $\nu_t$  は分子運動による分子動粘性係数に対する渦運動効果を表すもので、渦動粘

性係数とよばれる。 $\nu$  と異なり  $\nu_t$  は流体の性質では定まらず流体運動の場所の関数である。渦動粘性係数  $\nu_t$  は分子動粘性係数と同じく [長さ] × [速度] の次元をもつ。乱流エネルギー  $k$  [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>] とその散逸率  $\varepsilon$  [m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>] を用いて  $C_\mu$  を比例定数として次元解析より  $\nu_t$  は以下のように求めることができる。

$$\nu_t = C_\mu L_e U_e = C_\mu (k^{3/2} \varepsilon^{-1}) (k^{1/2}) = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.2.14)$$

$k$  と  $\varepsilon$  は場所の関数なので、 $\nu_t$  も場所の関数となる。

(2.2.11) 式において,

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2.15)$$

と表したとする。このとき、 $i=j$  のとき左辺は

$$-\overline{u'_i u'_i} = -(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) = -2k \quad (2.2.16)$$

となり、乱流エネルギーの 2 倍となる。一方、右辺は平均流の連続の式より

$$2\nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) = 2\nu_t \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (2.2.17)$$

となり、左辺 = 右辺とはならない。このことを解消するために、以下の付加項

$$-\frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.2.18)$$

を加える。 $i=j$  のとき

$$-\frac{2}{3} k \delta_{ii} = -\frac{2}{3} (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) = -2k \quad (2.2.19)$$

したがって Reynolds 応力は,

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.2.20)$$

したがってまた (2.2.11) 式は,

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( P + \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.2.21)$$

となる。

### 2. 3 $k$ - $\varepsilon$ モデルの導出

Reynolds 応力の輸送方程式は変動量の Navier-Stokes 方程式を  $L(u'_i)$  とするとき演算

$$\left\langle u'_j L(u'_i) + u'_i L(u'_j) \right\rangle = 0 \quad (2.3.1)$$

により以下のように求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \\ &= - \left\{ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \left\langle p' (u'_j \delta_{ik} + u'_i \delta_{jk}) \right\rangle \right\} \\ &+ p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

乱流エネルギー  $k$  は

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} R_{ii} \quad (2.3.3)$$

の関係があるので、その輸送方程式は Reynolds 応力の縮約により以下のように表される。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{(k' + p') u'_k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right\} - \varepsilon \quad (2.3.4)$$

乱流エネルギーの散逸率  $\varepsilon$  の輸送方程式は、演算

$$\left\langle 2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} L(u'_j) \right\rangle \quad (2.3.5)$$

によって導かれる  $\varepsilon_{ij}$  の輸送方程式の縮約

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{ii} \quad (2.3.6)$$

により以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= -2 \nu \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j \varepsilon'} + 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2 \nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

それぞれの輸送方程式は以下のようにモデル化される。

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} + \phi_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (2.3.8)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k + D_k - \varepsilon \quad (2.3.9)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon + D_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon \quad (2.3.10)$$

$$P_k = - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rightarrow P_k = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} : \text{Boussinesq の渦粘性モデル}$$

$$D_k = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} + p' \right) u'_j - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} \rightarrow - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\}, \quad \sigma_k = 1.0 : \text{勾配拡散近似}$$

$$P_\varepsilon = -2 \nu \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \rightarrow P_\varepsilon = C_{\varepsilon_1} P_k \frac{\varepsilon}{k}, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.44$$

$$D_\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j \varepsilon'} + 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \rightarrow D_\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\}, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 : \text{勾配拡散近似}$$

$$\varepsilon_\varepsilon = -2 \nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \rightarrow \varepsilon_\varepsilon = C_{\varepsilon_2} \varepsilon \frac{\varepsilon}{k}, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92 \quad (2.3.11)$$

したがって最終的には以下の方程式が得られる。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + P_k - \varepsilon \quad (2.3.12)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} + (C_{\varepsilon_1} P_k - C_{\varepsilon_2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.3.13)$$

## 2. 4 Kato-Launder モデル

乱流エネルギー  $k$  の生成項は以下のように表される。

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.4.1)$$

図 2. 1 に示すように主流  $U_1$  が  $x_2$  軸に平行な平面に垂直に衝突しているとする。2次元噴流の中心軸上 ( $\partial U_1 / \partial x_2 \approx 0$ ,  $U_2 \approx 0$ ) で  $k$  の生産項  $P_k$  は、連続の式 ( $\partial U_1 / \partial x_1 + \partial U_2 / \partial x_2 = 0$ ) を考慮すれば次のように書くことができる。

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \approx -(\overline{u_1^2} - \overline{u_2^2}) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad (2.4.2)$$

この流れ場では乱流強度の渦粘性表現は、

$$\begin{aligned} \overline{u_1^2} &= \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \\ \overline{u_2^2} &= \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

となる。これらを  $P_k$  の式に代入すれば、 $P_k$  は、

$$P_k = 4\nu_t \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 \quad (2.4.4)$$

となる。これは常に正值となるが、本来の表現では  $\overline{u_1^2}$  と  $\overline{u_2^2}$  が互いに差し引く形式になっており、正值、負値両方を取りうる。これが衝突領域における  $k$ - $\epsilon$  モデルの  $k$  の過大評価のメカニズムであり、歪み速度テンソルの直交成分が存在する流れ場における渦粘性モデルの構造的欠陥の1つである<sup>1)</sup>。

こうした不備を解消するために Kato-Launder<sup>1)</sup> は  $k$  の生産項  $P_k$  を次のように修正したモデルを提案した<sup>2)</sup>。

$$P_k = C_\mu \epsilon S \Omega \quad (2.4.5)$$

$$S = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad \Omega = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (2.4.6)$$

ここに  $S$  および  $\Omega$  は無次元化された歪み速度および無次元化された渦度である。このモデルにおいては、単純せん断流の場合には  $\Omega = S$  であるので  $P_k$  は本来の表現に帰着し、上記のような衝突噴流の中心軸上では  $\Omega = 0$  となり  $P_k = 0$  となる。したがって衝突領域における  $k$  の過大評価を避けることができる。

以上は等方的渦粘性モデルの枠組み内でのモデルの改良であるが、Reynolds 応力の非等方性

を考慮する方向性もある。Kato-Launder モデル以降に発表された Reynolds 応力の非等方性を  $S$  と  $\Omega$  を用いてそのより高次の項によって考慮した非線形  $k$ - $\epsilon$  モデルにおいては Kato-Launder モデルの効果は取り入れられており、その意味では Kato-Launder モデルは非線形  $k$ - $\epsilon$  モデルの最も低次のモデルとみなすこともできる。

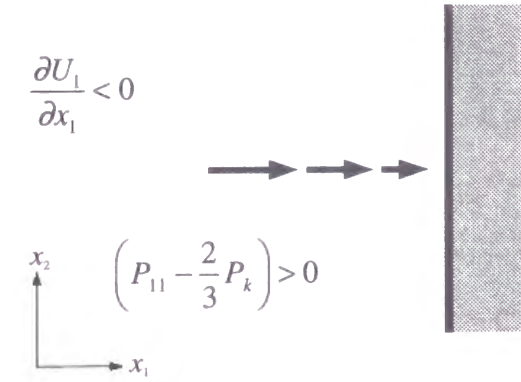


図 2. 1 衝突領域における  $P_k$ <sup>1)</sup>



## 2. 5 Two-layer モデル<sup>6)</sup>

### 2. 5. 1 Two-layer モデルの背景

$k$ - $\varepsilon$ モデルによる解析は当初は粘性が影響する壁近傍の層を解像する代わりにwall functionによって橋渡しすることで行われた。この方法は現在でも多くの商用コードに採用されているものであるが、2つの理由で用いられている。その第1は物理量の急な勾配が存在する壁近傍の薄い層の解像は当面の計算機資源ではその能力の範囲外であること、第2にはモデル係数が定数である標準  $k$ - $\varepsilon$ モデルは粘性が影響する領域には適用できないことである。Wall functionを用いる場合、壁に最も近い格子点を粘性底層の外 ( $30 \leq y^+ \leq 200$ ) にとる。Wall functionは第1格子点における流速の対数則分布の仮定および、乱れの局所平衡 (生成 = 散逸) の仮定が成り立つことを強い前提とし、この点において速度、乱流パラメーター  $k$  および  $\varepsilon$  を摩擦速度  $U_\tau$  に関係づける (2. 5. 1)。

$$\frac{U_p}{U_\tau} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ E y_p \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\nu} \right] \quad (2.5.1)$$

$$k = \frac{U_\tau^3}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{U_\tau^3}{\kappa y}$$

ここに添字の  $p$  は第1格子点であることを表す。しかしこれらの仮定は、はく離流では一般には正しくない (Rodi 1991)<sup>3)</sup>。また、摩擦速度が関係してくる wall function はその符号を変えるはく離、再付着領域では不適當である。

一方、計算機の進歩により多くの感心が、wall function を用いずに、壁に非常に近い部分で

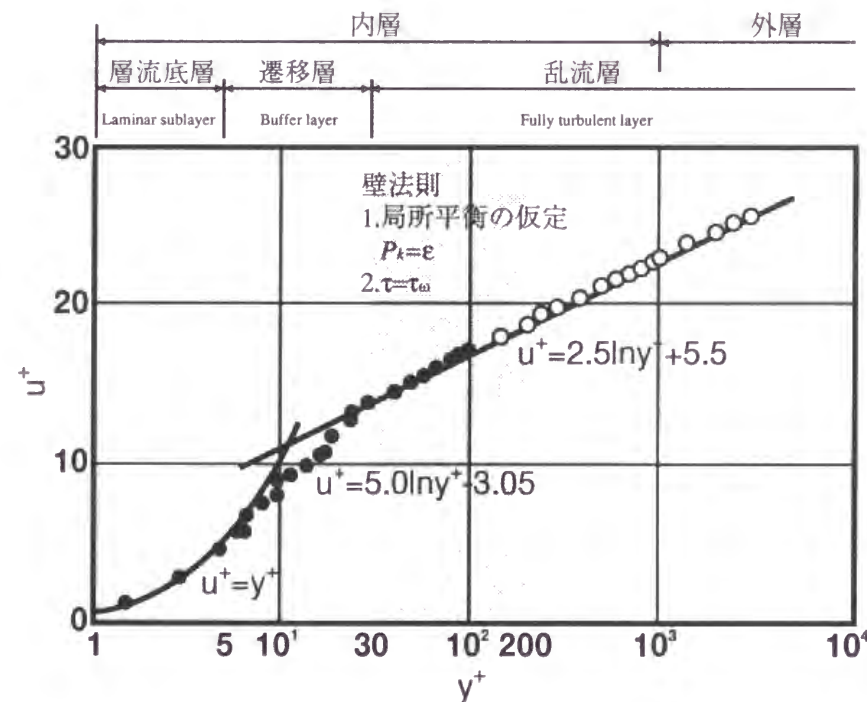


図 2. 2 普遍速度分布

の乱流構造を再現するための低レイノルズ数モデルの開発とその検証に向けられた。その一般的な表現は次式のようになる。

$$v_i = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.5.2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{v_i}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + P_k - \tilde{\varepsilon} - D$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right\} + (C_{\varepsilon_1} f_1 P_k - C_{\varepsilon_2} f_2 \tilde{\varepsilon}) \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} + E$$

$k$ - $\varepsilon$ モデルを粘性に影響する壁近傍の領域に適用するために、標準  $k$ - $\varepsilon$ モデル中の係数  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon_1}$ ,  $C_{\varepsilon_2}$  を粘性に依存する関数  $C_\mu f_\mu$ ,  $C_{\varepsilon_1} f_1$ ,  $C_{\varepsilon_2} f_2$  で置き換えること、および  $k$  と  $\varepsilon$  方程式中に付加項  $E$ ,  $D$  を加えることによって修正され、異なる関数や付加項をもつ多くの低レイノルズ数型  $k$ - $\varepsilon$ モデルが提案された。それらすべては主として境界層流で検証されており、そのいくつかは現在でもよく用いられている。モデルにもよるが一般に低レイノルズ数  $k$ - $\varepsilon$ モデルは壁近傍で高い解像度を必要とする。これは主としてその領域で散逸率  $\varepsilon$  の急な変化があるためで、その分布は  $\varepsilon$  の輸送方程式を解くことで決定される。このために境界層中に60から100点が必要とされているが、最近の計算機の進歩をもってしてもこれは多くの固体壁境界が関わってくる一般の3次元流れでは必ずしも得策であるとはいえない。

格子点数、すなわち計算機のメモリーと時間を節約し、ロバスト性を増すため、そしてよく吟味された壁のごく近傍の長さスケール分布をモデルに取り込むことにより、 $k$ - $\varepsilon$ モデルを壁から離れたところで用い、壁近傍の粘性が影響する層を長さスケールで規定する、より簡単なモデルとしてtwo-layerモデルが考案された。Iacovides and Launder(1987)<sup>4)</sup>は混合距離モデルのvan Driest版を、Chen and Patel(1988, 1989)<sup>5,6)</sup>はWolfstein(1969)<sup>7)</sup>の1方程式モデルを、Rodi et al.はNorris-Reynolds(1975)<sup>8)</sup>の1方程式モデルを標準  $k$ - $\varepsilon$ モデルと組み合わせて解析を行なっている。

### 2. 5. 2 Two-layer モデルの構成式

Two-layerモデルによる解析では標準高Reynolds数  $k$ - $\varepsilon$ モデルを壁のごく近傍以外の流れ場の大部分で用いる。このモデルは渦粘性の考え方に基づいており渦粘性の分布を次式から計算する。

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} l_\mu \quad (2.5.3)$$

固体壁近傍の粘性の影響が卓越する領域では1方程式型乱流モデルを用いる。乱流エネルギーの散逸率  $\varepsilon$  は渦粘性において長さスケール  $l_\mu$  を決定する役割として、また  $k$  方程式の source 項として現れるが、この領域においては渦粘性の長さスケール  $l_\mu$  は次式用いて表すため、後者の

役割のみとなる。

$$l_\mu = C_l y \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{R_{e_y}}{A_\mu} \right) \right\} \quad (2.5.4)$$

$\varepsilon$ は輸送方程式を解くことによって得られるのではなく、ある決まった長さスケールの分布 $l_\varepsilon$ から決定される。

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} \quad (2.5.5)$$

壁に非常に近い領域における渦粘性の減衰は、混合距離モデルにおける van Driest 減衰関数と同様に指数関数によって $l_\mu$ の減衰で表現される。この中には乱流 Reynolds 数

$$R_{e_y} = \frac{k^{1/2} y}{\nu} \quad (2.5.6)$$

が含まれている。これは van Driest 関数の中では定数である。また、摩擦速度に関係していないので、はく離流れについても適用できる。ここで $C_l$ は対数則との整合性を考慮すると、

$$C_l = \kappa C_\mu^{-3/4} \quad (2.5.7)$$

となる。 $C_\mu$ は $k$ - $\varepsilon$ モデルに使われているものと同じで $\kappa$ はKarman定数である。減衰関数中の $A_\mu$ はモデルごとに異なるが、70(Chen and Patel), 62.5(Launder et al.), 50.5(Norris-Reynolds)が用いられている。

散逸率 $\varepsilon$ の式中における長さスケール $l_\varepsilon$ も減衰が関係する。Wolfsteinのモデルでは $l_\mu$ と同様に指数関数が用いられている。

$$l_\varepsilon = C_l y \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{R_{e_y}}{A_\varepsilon} \right) \right\} \quad (2.5.8)$$

減衰係数 $A_\varepsilon$ として、Launderらは3.8を、Patelらは $A_\varepsilon = 2C_l = 5.08$ を用いている。Norris-Reynoldsは次式に示すような別の減衰関数を提案している。

$$l_\varepsilon = \frac{C_l y}{1 + 5.3 / R_{e_y}} \quad (2.5.9)$$

ところで、最近のDNSデータによる検証によつてはこれら1方程式モデルとDNSのデータによる $\varepsilon$ の分布は厳密には一致しないことが示されている。しかし工学的にはその違いによる影響は小さいものと考えられている。

### 2. 5. 3 Two-layer モデルの本解析における取り扱い

矩形断面を過ぎる流れの解析において、辺長比が大きい場合に、はく離せん断層の再付着が生じる。本解析ではこのような状況においても精度低下がないように、はく離せん断層を可能な限り細かく解像する。このため粘性の作用が支配的になる壁近傍の境界層も解くことになり、低Reynolds数モデル的な取り扱いが必要になる。ところでtwo-layerモデルでは(2. 5. 4)式のように粘性の作用にともなう乱流粘性の減衰効果が考慮されていることから、低Reynolds数モデルの最も低次のモデルと考えることができる。

Two-layerモデルの利点のひとつに $\varepsilon$ についての取り扱いが簡単なことがあげられる。これまでに提案されている低Reynolds数モデルでは $\varepsilon$ の境界条件の取り扱いが特に複雑であり、構造物断面に鋭いコーナー部がある場合や形状が複雑な場合には解析が安定に進められない可能性がある。これに対してtwo-layerモデルでは既に示したように $\varepsilon$ に関して陽には解かないためロバスト性がある。これらのことを考慮し、本解析においては粘性の作用が支配的になる壁近傍にはtwo-layerモデルを用いた。

Two-layerモデルの適用範囲、すなわち高Reynolds数 $k$ - $\varepsilon$ モデルとの接続に関しては一般に以下に示すような方法が考えられる。

- (1) あるグリッドラインまでで打ち切る。
- (2)  $\nu_t / \nu$ すなわち乱流粘性が分子粘性に比較してある大きさになった場合。
- (3) (2. 5. 4)式で表される $l_\mu$ の括弧内の値がほぼ1、すなわち粘性の影響が小さくなるところまで。

第1の方法では乱流Reynolds数 $Re_y$ がある値を超えた場所が設定される。ちなみに通常の境界層では $Re_y=250$ は $y^+=135$ に相当する。これらはなんらかのクライテリアを設定していることになるが、本解析では特にクライテリアは設定せずにその適用領域を壁面から3メッシュ以内に限って適用することとし、two-layerモデルを $\varepsilon$ に関しての一種の境界条件として用いた。したがってtwo-layerモデルの一般的な使い方とは多少異なるが、このことによる流れ場全体への大きな影響は後述するように特には見られていない。



## 2. 6 RANS モデルによる非定常流解析の概念

$k-\epsilon$  モデルに代表されるRANSモデルは元来、定常解法としての位置付けがなされてきており、現に当初はそのような用いられ方が主流であった。Karman 渦を伴うような非定常流れに対する適用が始まったのはかなり遅れてのことである。このような非定常な流れ場に適用した場合、解析によって得られる結果はアンサンブル平均したものとみなすことができる。Franke & Rodi(1991)<sup>9)</sup>は図2.3に示すような概念図でこれを説明している。すなわち、全変動量 $f$ は、

$$f = \bar{f} + \tilde{f} + f' = \langle f \rangle + f' \quad (2.6.1)$$

のように表せる。ここに、 $\bar{f}$ は長時間平均値、 $\tilde{f}$ は変動のperiodic成分、また $f'$ は変動のstochastic成分である。これらのうちで平均化Navier-Stokes方程式から実際に得られる量は $\langle f \rangle = \bar{f} + \tilde{f}$ である。流速成分のstochastic成分は乱流エネルギー $k$ として評価される。いわゆるdirect simulationでは全変動量 $f = \langle f \rangle + f'$ が逐一得られるのとは異なる点が特徴である。

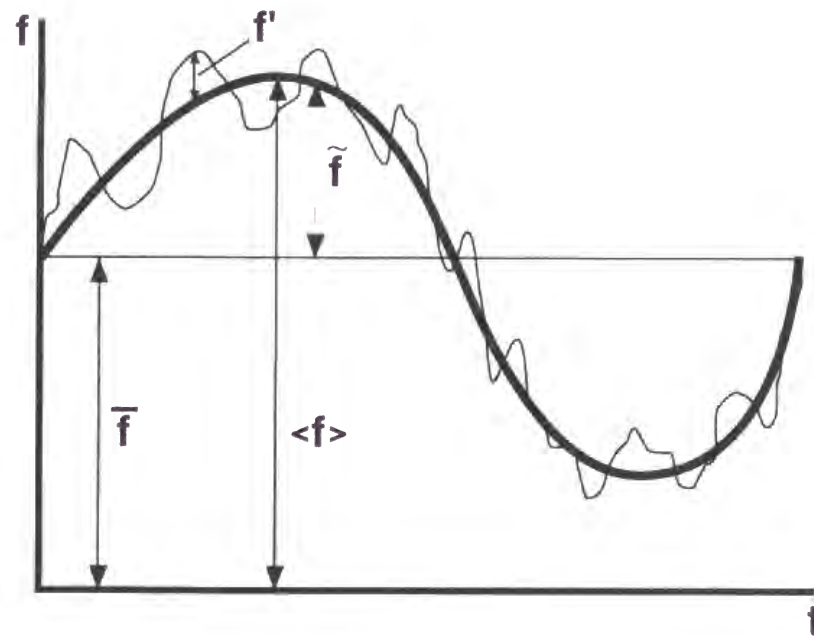


図2.3  $k-\epsilon$  モデルによる非定常流解析の概念図

## 2. 7 一般座標系導入のメリットおよびデメリット

一般座標系を導入することのメリットは以下のような点にある。

1. 任意形状の表現
2. 境界層の高解像
3. コーディングの簡易性
4. 解析の高速化
5. 解析コードの汎用性

1. 従来、差分法は境界が曲面を有する場合には、特別な措置が必要で、精度も落ちると言われていたが、一般座標系の導入で非構造格子を用いる解法と同等の精度が確保される。2. 一般座標系のもうひとつの大きなメリットは格子密度をローカルに自由に調節できるため、物理量の変化の激しいところに格子を集めて、解析精度を上げることが可能なことがあげられる。Bluff bodyの解析では物体面上に発達する境界層を捕らえるために境界近くに格子を集中させる。3. 物理面上では曲線格子であるが、変換した方程式系を解く計算面はデカルト座標系であるため、シンプルな差分式を用いることができる。このことは4. 高次精度の差分式を導入しやすいことや、5. ベクトルプロセッサ向き的高速アルゴリズムを導入するうえでも有利であり、演算の高速化をはかることにつながる。5. また計算面は常にデカルト座標系であるので、格子生成を新たに行えば、いかなる形状の物体にもまったく変更を加えることなしに同じ解析コードが適用可能なので省力化につながる。

一方、デメリットとしては、

1. メトリックスのための多くの記憶領域が必要
2. 計算量の増加

である。1. 変換にともなってメトリックスが現れる。したがって物理面上でデカルト座標系を用いる単純な解法に比べ、このための記憶容量が必要となる。また、2. 変換後の式はもとの式に比べかなり冗長になるため、その分の計算量が増加する。

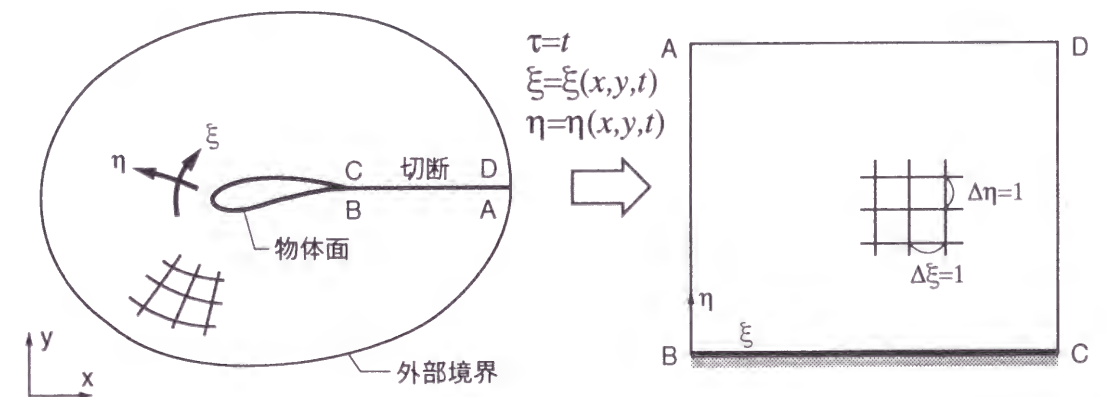


図2.4 境界適合曲線座標 (O型格子)<sup>10)</sup>

## 2. 8 一般座標系における導関数およびメトリックス

### 2. 8. 1 1 階導関数

$$\begin{cases} x = x(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(x, y, t)) \\ y = y(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(x, y, t)) \\ z = z(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(x, y, t)) \end{cases} \quad (2.8.1)$$

両辺を  $x$  で微分すると,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ t_\xi & t_\eta & t_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \eta_x \\ \tau_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \eta_x \\ \tau_x \end{bmatrix} \quad (2.8.2)$$

したがって,

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \eta_x \\ \tau_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} [A_{ij}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} \quad (2.8.3)$$

ここに,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} y_\eta & y_\tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_\eta, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} y_\xi & y_\tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -y_\xi, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} y_\xi & y_\eta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8.4)$$

であるから,

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J}, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.8.5)$$

ここに  $J$  は Jacobian である. 同様に両辺  $y$  で微分すると,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ t_\xi & t_\eta & t_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_y \\ \eta_y \\ \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_y \\ \eta_y \\ \tau_y \end{bmatrix} \quad (2.8.6)$$

したがって,

$$\begin{bmatrix} \xi_y \\ \eta_y \\ \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} [A_{ij}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \end{bmatrix} \quad (2.8.7)$$

ここに,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x_\eta & x_\tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -x_\eta, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} x_\xi & x_\tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_\xi, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8.8)$$

であるから,

$$\xi_y = -\frac{x_\eta}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J}, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.8.9)$$

同様に両辺  $t$  で微分すると,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ t_\xi & t_\eta & t_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ \eta_t \\ \tau_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ \eta_t \\ \tau_t \end{bmatrix} \quad (2.8.10)$$

したがって,

$$\begin{bmatrix} \xi_t \\ \eta_t \\ \tau_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} [A_{ij}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8.11)$$

ここに,

$$\begin{aligned} A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{vmatrix} = x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x_\xi & x_\tau \\ y_\xi & y_\tau \end{vmatrix} = -(x_\xi y_\tau - x_\tau y_\xi), \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

であるから,

$$\xi_t = \frac{x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta}{J}, \quad \eta_t = -\frac{(x_\xi y_\tau - x_\tau y_\xi)}{J}, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.8.13)$$

以上まとめると 1 階導関数は以下のように表される.

$$\begin{cases} \partial_x = \xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta + \tau_x \partial_\tau = J^{-1} (y_\eta \partial_\xi - y_\xi \partial_\eta) \\ \partial_y = \xi_y \partial_\xi + \eta_y \partial_\eta + \tau_y \partial_\tau = J^{-1} (-x_\eta \partial_\xi + x_\xi \partial_\eta) \\ \partial_t = \xi_t \partial_\xi + \eta_t \partial_\eta + \tau_t \partial_\tau = \partial_\tau + J^{-1} \{ (x_\eta y_\tau - y_\eta x_\tau) \partial_\xi + (y_\xi x_\tau - x_\xi y_\tau) \partial_\eta \} \end{cases} \quad (2.8.14)$$

## 2. 8. 2 2階導関数

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} &= \partial_x (\xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta + \tau_x \partial_\tau) \\
&= \xi_{xx} \partial_\xi + \xi_x \partial_x \partial_\xi + \eta_{xx} \partial_\eta + \eta_x \partial_x \partial_\eta + \tau_{xx} \partial_\tau + \tau_x \partial_x \partial_\tau \\
&= \xi_{xx} \partial_\xi + \eta_{xx} \partial_\eta + \xi_x^2 \partial_{\xi\xi} + \eta_x^2 \partial_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x \partial_{\xi\eta} \\
&= -J^{-3} \left\{ y_\eta^2 (y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi}) - 2y_\xi y_\eta (y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta}) + y_\xi^2 (y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta}) \right\} \partial_\xi \\
&\quad + J^{-3} \left\{ y_\eta^2 (y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi}) - 2y_\xi y_\eta (y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta}) + y_\xi^2 (y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta}) \right\} \partial_\eta \\
&\quad + J^{-2} (y_\eta^2 \partial_{\xi\xi} + y_\xi^2 \partial_{\eta\eta} - 2y_\xi y_\eta \partial_{\xi\eta})
\end{aligned} \tag{2.8.15}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{yy} &= \xi_{yy} \partial_\xi + \eta_{yy} \partial_\eta + \xi_y^2 \partial_{\xi\xi} + \eta_y^2 \partial_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y \partial_{\xi\eta} \\
&= -J^{-3} \left\{ x_\eta^2 (y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi}) - 2x_\xi x_\eta (y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta}) + x_\xi^2 (y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta}) \right\} \partial_\xi \\
&\quad + J^{-3} \left\{ x_\eta^2 (y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi}) - 2x_\xi x_\eta (y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta}) + x_\xi^2 (y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta}) \right\} \partial_\eta \\
&\quad + J^{-2} (x_\eta^2 \partial_{\xi\xi} + x_\xi^2 \partial_{\eta\eta} - 2x_\xi x_\eta \partial_{\xi\eta})
\end{aligned} \tag{2.8.16}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{xy} &= \partial_x \partial_y \\
&= \xi_x \partial_\xi \partial_y + \eta_x \partial_\eta \partial_y \\
&= \left\{ \xi_x (\partial_\xi \xi_y) + \eta_x (\partial_\eta \xi_y) \right\} \partial_\xi + \left\{ \xi_x (\partial_\xi \eta_y) + \eta_x (\partial_\eta \eta_y) \right\} \partial_\eta \\
&\quad + \xi_x \xi_y \partial_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y \partial_{\eta\eta} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \partial_{\xi\eta} \\
&= \xi_{xy} \partial_\xi + \eta_{xy} \partial_\eta + \xi_x \xi_y \partial_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y \partial_{\eta\eta} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \partial_{\xi\eta}
\end{aligned} \tag{2.8.17}$$

ラプラシアンは,

$$\partial_{xx} + \partial_{yy} = (\xi_{xx} + \xi_{yy}) \partial_\xi + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \partial_\eta + (\xi_x^2 + \xi_y^2) \partial_{\xi\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \partial_{\eta\eta} + 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \partial_{\xi\eta} \tag{2.8.18}$$

ここに,

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = J^{-3} \left\{ -(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) y_\eta + (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) x_\eta \right\} \tag{2.8.19}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = J^{-3} \left\{ (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) y_\xi - (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) x_\xi \right\} \tag{2.8.20}$$

$$\begin{cases} \alpha = \xi_x^2 + \xi_y^2 = |\nabla \xi|^2 = J^{-2} (x_\eta^2 + y_\eta^2) \\ \beta = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = \nabla \xi \cdot \nabla \eta = -J^{-2} (y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta) \\ \gamma = \eta_x^2 + \eta_y^2 = |\nabla \eta|^2 = J^{-2} (x_\xi^2 + y_\xi^2) \end{cases} \tag{2.8.21}$$

(2. 8. 19) および (2. 8. 20) 式は以下のようにして求めることができる. (2. 8. 2) 式を  $x$  で, また (2. 8. 6) 式を  $y$  でもう 1 回微分し和をとると,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\xi\xi} & x_{\eta\eta} & 2x_{\xi\eta} & x_\xi & x_\eta \\ y_{\xi\xi} & y_{\eta\eta} & 2y_{\xi\eta} & y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x^2 + \xi_y^2 \\ \eta_x^2 + \eta_y^2 \\ \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \\ \xi_{xx} + \xi_{yy} \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.8.22}$$

上式の両辺に左から

$$\begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ y_\xi & -x_\xi \end{bmatrix} \tag{2.8.23}$$

をかけることにより

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi} & y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta} & 2(y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta}) & J & y_\eta x_\eta - x_\eta y_\eta \\ y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi} & y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta} & 2(y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta}) & y_\xi x_\xi - x_\xi y_\xi & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x^2 + \xi_y^2 \\ \eta_x^2 + \eta_y^2 \\ \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \\ \xi_{xx} + \xi_{yy} \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.8.24}$$

となり (2. 8. 19) および (2. 8. 20) 式を得る.

また,  $\xi_{xx}$ ,  $\eta_{xx}$ ,  $\xi_{yy}$ ,  $\eta_{yy}$ ,  $\xi_{xy}$  および  $\eta_{xy}$  は同様に求めることができ, 以下のように表される.

$$\xi_{xx} = -J^{-3} \left\{ y_\eta^2 (y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi}) - 2y_\xi y_\eta (y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta}) + y_\xi^2 (y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta}) \right\} \tag{2.8.25}$$

$$\eta_{xx} = J^{-3} \left\{ y_\eta^2 (y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi}) - 2y_\xi y_\eta (y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta}) + y_\xi^2 (y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta}) \right\} \tag{2.8.26}$$

$$\xi_{yy} = -J^{-3} \left\{ x_\eta^2 (y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi}) - 2x_\xi x_\eta (y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta}) + x_\xi^2 (y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta}) \right\} \tag{2.8.27}$$

$$\eta_{yy} = J^{-3} \left\{ x_\eta^2 (y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi}) - 2x_\xi x_\eta (y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta}) + x_\xi^2 (y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta}) \right\} \tag{2.8.28}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{xy} &= -\frac{1}{J} \left[ \left\{ \xi_x \xi_y x_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y x_{\eta\eta} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) x_{\xi\eta} \right\} y_\eta \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \xi_x \xi_y y_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y y_{\eta\eta} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) y_{\xi\eta} \right\} x_\eta \right] \\
&= -J^{-3} \left[ \left\{ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} \right\} y_\eta \right. \\
&\quad \left. - \left\{ -x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} \right\} x_\eta \right]
\end{aligned} \tag{2.8.29}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{xy} &= -\frac{1}{J} \left[ \left\{ \xi_x \xi_y x_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y x_{\eta\eta} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) x_{\xi\eta} \right\} y_\xi \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \xi_x \xi_y y_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y y_{\eta\eta} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) y_{\xi\eta} \right\} x_\xi \right] \\
&= -J^{-3} \left[ \left\{ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} \right\} y_\xi \right. \\
&\quad \left. - \left\{ -x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} \right\} x_\xi \right]
\end{aligned} \tag{2.8.30}$$



## 2. 9 一般座標系による基礎方程式系の定式化

### 2. 9. 1 基礎方程式

解くべき基礎方程式系のデカルト座標系表示は以下のようになる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.9.1)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( P + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \nu_i \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.2.21)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon \quad (2.3.12)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_i}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \left( C_{\varepsilon_1} P_k - C_{\varepsilon_2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.3.13)$$

これらは保存形で書かれている。本解析では上式の非保存形を取り扱う。運動量方程式の非保存形表示は以下のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \Delta U + \nu_i \left( \Delta U + \frac{\partial D}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \nu_i}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.9.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \nu \Delta V + \nu_i \left( \Delta V + \frac{\partial D}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \nu_i}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \nu_i}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.9.3)$$

$k$ および $\varepsilon$ 方程式の拡散項の非保存形表示は以下のようになる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \left( \nu + \frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) \Delta k + \sigma_k^{-1} \left( \frac{\partial \nu_i}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \varepsilon \quad (2.9.4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \left( \nu + \frac{\nu_i}{\sigma_\varepsilon} \right) \Delta \varepsilon + \sigma_\varepsilon^{-1} \left( \frac{\partial \nu_i}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \left( C_{\varepsilon_1} P_k - C_{\varepsilon_2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.9.5)$$

圧力は(2. 2. 2 1)式の発散をとり連続の式(2. 9. 1)式を考慮した次式に示す圧力のPoisson方程式から求める。

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu_i \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \right] \quad (2.9.6)$$

ここに $D = \partial U_i / \partial x_i (i=1,2)$ である。ここで右辺第1～第3項目までは移流項から派生したソース項であり、第3項目はReynolds応力により派生したものである。第4項目は粘性拡散項によるソース項であるが、高Reynolds数の場合小さいものとして通常無視される。展開した形で示

すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 P = & \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + U \frac{\partial D}{\partial x} + V \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial t} \\ & + 2 \left\{ \nu_i \Delta D + \frac{\partial \nu_i}{\partial x} \left( \Delta U + \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{\partial \nu_i}{\partial y} \left( \Delta V + \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \nu_i}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \nu_i}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \nu_i}{\partial y^2} \frac{\partial V}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

### 2. 9. 2 一般座標系による基礎方程式

以上に示した方程式系を一般座標系により表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} & U_\tau + J^{-1} \left\{ -(V - y_\tau) x_\eta + (U - x_\tau) y_\eta \right\} U_\xi + J^{-1} \left\{ -(U - x_\tau) y_\xi + (V - y_\tau) x_\xi \right\} U_\eta \\ & = -J^{-1} \left\{ y_\eta \left( P + \frac{2}{3} k \right)_\xi - y_\xi \left( P + \frac{2}{3} k \right)_\eta \right\} \\ & + \nu \left( \alpha U_{\xi\xi} + 2\beta U_{\xi\eta} + \gamma U_{\eta\eta} + \lambda_y U_\xi + \lambda_x U_\eta \right) \\ & + \nu_i \left\{ \left( \alpha U_{\xi\xi} + 2\beta U_{\xi\eta} + \gamma U_{\eta\eta} + \lambda_y U_\xi + \lambda_x U_\eta \right) + J^{-1} \left( y_\eta D_\xi - y_\xi D_\eta \right) \right\} \\ & + 2J^{-2} \left( y_\eta \nu_{i\xi} - y_\xi \nu_{i\eta} \right) \left( y_\eta U_\xi - y_\xi U_\eta \right) \\ & + J^{-2} \left( -x_\eta \nu_{i\xi} + x_\xi \nu_{i\eta} \right) \left( -x_\eta U_\xi + x_\xi U_\eta + y_\eta V_\xi - y_\xi V_\eta \right) \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

$$\begin{aligned} & V_\tau + J^{-1} \left\{ -(V - y_\tau) x_\eta + (U - x_\tau) y_\eta \right\} V_\xi + J^{-1} \left\{ -(U - x_\tau) y_\xi + (V - y_\tau) x_\xi \right\} V_\eta \\ & = -J^{-1} \left\{ -x_\eta \left( P + \frac{2}{3} k \right)_\xi + x_\xi \left( P + \frac{2}{3} k \right)_\eta \right\} \\ & + \nu \left( \alpha V_{\xi\xi} + 2\beta V_{\xi\eta} + \gamma V_{\eta\eta} + \lambda_y V_\xi + \lambda_x V_\eta \right) \\ & + \nu_i \left\{ \left( \alpha V_{\xi\xi} + 2\beta V_{\xi\eta} + \gamma V_{\eta\eta} + \lambda_y V_\xi + \lambda_x V_\eta \right) + J^{-1} \left( -x_\eta D_\xi + x_\xi D_\eta \right) \right\} \\ & + 2J^{-2} \left( -x_\eta \nu_{i\xi} + x_\xi \nu_{i\eta} \right) \left( -x_\eta V_\xi + x_\xi V_\eta \right) \\ & + J^{-2} \left( y_\eta \nu_{i\xi} - y_\xi \nu_{i\eta} \right) \left( -x_\eta U_\xi + x_\xi U_\eta + y_\eta V_\xi - y_\xi V_\eta \right) \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \lambda_x &= -(D_x \xi_x + D_y \xi_y), & \lambda_y &= -(D_x \eta_x + D_y \eta_y) \\ D_x &= \alpha x_{\xi\xi} + \beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}, & D_y &= \alpha y_{\xi\xi} + \beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

である。これを再びデカルト座標系に変換すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + \left( U_j - \frac{\partial x_j}{\partial \tau} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( P + \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \nu_i \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.9.11)$$

乱流エネルギー  $k$  の輸送方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
& k_\tau + J^{-1} \left\{ -(V - y_\tau)x_\eta + (U - x_\tau)y_\eta \right\} k_\xi + J^{-1} \left\{ -(U - x_\tau)y_\xi + (V - y_\tau)x_\xi \right\} k_\eta \\
&= \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \left( \alpha k_{\xi\xi} + 2\beta k_{\xi\eta} + \gamma k_{\eta\eta} + \lambda_y k_\xi + \lambda_x k_\eta \right) \\
&+ \sigma_k^{-1} J^{-2} \left\{ \left( y_\eta v_{i\xi} - y_\xi v_{i\eta} \right) \left( y_\eta k_\xi - y_\xi k_\eta \right) + \left( -x_\eta v_{i\xi} + x_\xi v_{i\eta} \right) \left( -x_\eta k_\xi + x_\xi k_\eta \right) \right\} \\
&+ P_k - \varepsilon
\end{aligned} \quad (2.9.12)$$

乱流エネルギーの散逸率  $\varepsilon$  の輸送方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_\tau + J^{-1} \left\{ -(V - y_\tau)x_\eta + (U - x_\tau)y_\eta \right\} \varepsilon_\xi + J^{-1} \left\{ -(U - x_\tau)y_\xi + (V - y_\tau)x_\xi \right\} \varepsilon_\eta \\
&= \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \left( \alpha \varepsilon_{\xi\xi} + 2\beta \varepsilon_{\xi\eta} + \gamma \varepsilon_{\eta\eta} + \lambda_y \varepsilon_\xi + \lambda_x \varepsilon_\eta \right) \\
&+ \sigma_\varepsilon^{-1} J^{-2} \left\{ \left( y_\eta v_{i\xi} - y_\xi v_{i\eta} \right) \left( y_\eta \varepsilon_\xi - y_\xi \varepsilon_\eta \right) + \left( -x_\eta v_{i\xi} + x_\xi v_{i\eta} \right) \left( -x_\eta \varepsilon_\xi + x_\xi \varepsilon_\eta \right) \right\} \\
&+ \left( C_{\varepsilon_1} P_k - C_{\varepsilon_2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{k}
\end{aligned} \quad (2.9.13)$$

圧力の Poisson 方程式は一般座標系により書き表すと以下ようになる。

$$\alpha P_{\xi\xi} + 2\beta P_{\xi\eta} + \gamma P_{\eta\eta} + \lambda_x P_\xi + \lambda_y P_\eta = S_l + S_D \quad (2.9.14)$$

右辺  $S_l$ ,  $S_D$  はそれぞれ実質微分項および Reynolds 応力項によるソース項である。実質微分項によるソース項を一般座標変換すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
S_l &= - \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + U \frac{\partial D}{\partial x} + V \frac{\partial D}{\partial y} \right\} - \frac{\partial D}{\partial t} \\
&= - \left\{ \left( \xi_x U_\xi + \eta_x U_\eta \right)^2 + 2 \left( \xi_y U_\xi + \eta_y U_\eta \right) \left( \xi_x V_\xi + \eta_x V_\eta \right) + \left( \xi_y V_\xi + \eta_y V_\eta \right)^2 \right\} \\
&\quad - \left\{ \left( U \xi_x + V \xi_y + \xi_t \right) D_\xi + \left( U \eta_x + V \eta_y + \eta_t \right) D_\eta + D_\tau \right\} \\
&= -J^{-2} \left\{ \left( y_\eta U_\xi - y_\xi U_\eta \right)^2 + 2 \left( -x_\eta U_\xi + x_\xi U_\eta \right) \left( y_\eta V_\xi - y_\xi V_\eta \right) + \left( -x_\eta V_\xi + x_\xi V_\eta \right)^2 \right\} \\
&\quad - J^{-1} \left\{ \left\{ (U - x_\tau)y_\eta - (V - y_\tau)x_\eta \right\} D_\xi + \left\{ -(U - x_\tau)y_\xi + (V - y_\tau)x_\xi \right\} D_\eta \right\} \\
&\quad - D_\tau
\end{aligned} \quad (2.9.15)$$

となる。ここで  $D = \partial U_i / \partial x_i$  である。また、サイクル誤差自己調整法 (Hirt-Harlow 1967)<sup>11)</sup> により  $D_\tau = (D^{n+1} - D^n) / \Delta t \approx -D^n / \Delta t$  とする。

$$\begin{aligned}
S_D &= -2 \left\{ \nu_t \Delta D + \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \left( \Delta U + \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{\partial \nu_t}{\partial y} \left( \Delta V + \frac{\partial D}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial y^2} \frac{\partial V}{\partial y} \right\} \\
&= -2 \nu_t \left( \alpha D_{\xi\xi} + 2\beta D_{\xi\eta} + \gamma D_{\eta\eta} + \lambda_y D_\xi + \lambda_x D_\eta \right) \\
&\quad - 2J^{-1} \left( y_\eta v_{i\xi} - y_\xi v_{i\eta} \right) \left\{ \left( \alpha U_{\xi\xi} + 2\beta U_{\xi\eta} + \gamma U_{\eta\eta} + \lambda_y U_\xi + \lambda_x U_\eta \right) + J^{-1} \left( y_\eta D_\xi - y_\xi D_\eta \right) \right\} \\
&\quad - 2J^{-1} \left( -x_\eta v_{i\xi} + x_\xi v_{i\eta} \right) \left\{ \left( \alpha V_{\xi\xi} + 2\beta V_{\xi\eta} + \gamma V_{\eta\eta} + \lambda_y V_\xi + \lambda_x V_\eta \right) + J^{-1} \left( -x_\eta D_\xi + x_\xi D_\eta \right) \right\} \\
&\quad - 2 \left[ -J^{-3} \left\{ y_\eta^2 \left( y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi} \right) - 2y_\xi y_\eta \left( y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta} \right) + y_\xi^2 \left( y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta} \right) \right\} v_{i\xi} \right. \\
&\quad \left. + J^{-3} \left\{ y_\eta^2 \left( y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi} \right) - 2y_\xi y_\eta \left( y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta} \right) + y_\xi^2 \left( y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta} \right) \right\} v_{i\eta} \right. \\
&\quad \left. + J^{-2} \left( y_\eta^2 v_{i\xi\xi} + y_\xi^2 v_{i\eta\eta} - 2y_\xi y_\eta v_{i\xi\eta} \right) \right] \cdot J^{-1} \left( y_\eta U_\xi - y_\xi U_\eta \right) \\
&\quad - 2 \left[ -J^{-3} \left\{ x_\eta^2 \left( y_\eta x_{\xi\xi} - x_\eta y_{\xi\xi} \right) - 2x_\xi x_\eta \left( y_\eta x_{\xi\eta} - x_\eta y_{\xi\eta} \right) + x_\xi^2 \left( y_\eta x_{\eta\eta} - x_\eta y_{\eta\eta} \right) \right\} v_{i\xi} \right. \\
&\quad \left. + J^{-3} \left\{ x_\eta^2 \left( y_\xi x_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\xi} \right) - 2x_\xi x_\eta \left( y_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi y_{\xi\eta} \right) + x_\xi^2 \left( y_\xi x_{\eta\eta} - x_\xi y_{\eta\eta} \right) \right\} v_{i\eta} \right. \\
&\quad \left. + J^{-2} \left( x_\eta^2 \partial_{\xi\xi} + x_\xi^2 \partial_{\eta\eta} - 2x_\xi x_\eta \partial_{\xi\eta} \right) \right] \cdot J^{-1} \left( -x_\eta V_\xi + x_\xi V_\eta \right) \\
&\quad - 2 \left[ 2J^{-3} \left\{ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + \left( x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi \right) x_{\xi\eta} \right\} y_\eta \right. \\
&\quad \left. - \left\{ -x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} + \left( x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi \right) y_{\xi\eta} \right\} x_\eta \right] v_{i\xi} \\
&\quad + 2J^{-3} \left\{ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + \left( x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi \right) x_{\xi\eta} \right\} y_\xi \\
&\quad - \left\{ -x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} + \left( x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi \right) y_{\xi\eta} \right\} x_\xi \right] v_{i\eta} \\
&\quad + 2J^{-2} \left( x_\eta y_\eta v_{i\xi\xi} + x_\xi y_\xi v_{i\eta\eta} \right) - 2J^{-2} \left( x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi \right) v_{i\xi\eta} \cdot J^{-1} \left( -x_\eta U_\xi + x_\xi U_\eta y_\eta V_\xi - y_\xi V_\eta \right)
\end{aligned} \quad (2.9.16)$$

## 2. 1 0 固体壁上の圧力の境界条件

圧力のPoisson方程式の固体壁上での境界条件は法線方向勾配 $\partial P / \partial n$ を与える。固体壁境界を $\eta = \text{const.}$ とするとこれは境界における圧力の勾配 $\nabla P$ の $\nabla \eta$ 方向への射影成分となり以下のように表せる。

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \nabla P \cdot \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|} \quad (2.10.1)$$

いま、運動量方程式を境界上で考える。境界上でno-slip条件により移流速度は零となり移流項は零となる。また粘性項を無視することにより、境界上での運動量方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla P \quad (2.10.2)$$

したがって $\partial P / \partial n$ は以下のように表される。

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial t} \cdot \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|} \quad (2.10.3)$$

ところで(2. 1 0. 1)式を $P_\eta$ について展開すれば、

$$P_\eta = -\frac{(\nabla \xi \cdot \nabla \eta)P_\xi - |\nabla \eta| \frac{\partial P}{\partial n}}{|\nabla \eta|^2} \quad (2.10.4)$$

であるから(2. 1 0. 3)式を上式に代入すれば $P_\eta$ に関して次式を得る(泉ら 1994)<sup>12)</sup>。

$$P_\eta = -\frac{(\nabla \xi \cdot \nabla \eta)P_\xi + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \nabla \eta}{|\nabla \eta|^2} \quad (2.10.5)$$

右辺第1項は空間的な補正項であり、格子が固体壁境界に直交していれば零となる。第2項は物体の加速度であり物体が静止しているかもしくは等速直線運動している場合は零となる。したがって物体の静止時に物体境界に格子が直交していれば法線方向勾配が零となる通常のNeumann条件に一致する。

## 2. 1 1 移動座標系における慣性項

運動量の輸送方程式中で移動座標系の移動速度が関係してくるのは速度の実質微分すなわち加速度の項である。以下では移動座標系で表した速度の実質微分の意味を考える。簡単のため1次元の移動座標系を例に考えてみる。 $x = x(\xi, \tau)$ ,  $t = t(\xi, \tau)$ であるから、

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \tau_x \\ \xi_t & \tau_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & 0 \\ \xi_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\tau \end{bmatrix} \quad (2.11.1)$$

したがって加速度は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + (u \xi_x + \xi_t) \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.11.2)$$

いま、最も簡単な場合として $x$ -座標系に対してそのままの形で $x$ の正の方向に一樣な速度 $c$ で動いている $\xi$ -座標系を考える(図2. 4)。すなわち、

$$\xi = x - ct \quad (2.11.3)$$

であるから、 $\xi_t = -c$ ,  $\xi_x = 1$ より、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.11.4)$$

となる。すなわち $\xi$ -座標系上から見た場合、流体塊には単位質量あたり見かけ上座標系の移動による $-c \partial u / \partial \xi$ の場所的加速度(移流加速度 convective acceleration)に伴う慣性力が作用していることになる。

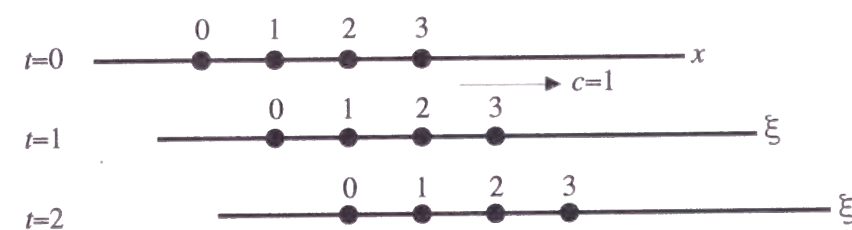


図2. 4 移動座標系(1次元, 例として $c=1$ とした場合)



## 2. 1 2 3 次精度風上差分

一般に高次精度の差分式の導出はそれより低次精度の差分式をベースにその先導誤差項 (leading error) を精度のよい差分近似で置き換えることによりなされる。Kawamura-Kuwahara(1989)<sup>13)</sup> による 3 次精度風上差分は以下に示す 2 次精度の風上差分をベースにする。

$$f \frac{\partial f}{\partial x} \approx f_i \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{4h} + |f_i| \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{4h} \quad (2.12.1)$$

右辺第 1 項目を Taylor 展開すると,

$$f_{i-2} = f_i - 2hf_i^{(1)} + 2h^2 f_i^{(2)} - \frac{4}{3}h^3 f_i^{(3)} + \frac{2}{3}h^4 f_i^{(4)} - \frac{4}{15}h^5 f_i^{(5)} + \dots \quad (2.12.2)$$

$$f_{i-1} = -4f_i + 4hf_i^{(1)} - 2h^2 f_i^{(2)} + \frac{2}{3}h^3 f_i^{(3)} - \frac{1}{6}h^4 f_i^{(4)} + \frac{1}{30}h^5 f_i^{(5)} + \dots \quad (2.12.3)$$

$$f_{i+1} = 4f_i + 4hf_i^{(1)} + 2h^2 f_i^{(2)} + \frac{2}{3}h^3 f_i^{(3)} + \frac{1}{6}h^4 f_i^{(4)} + \frac{1}{30}h^5 f_i^{(5)} + \dots \quad (2.12.4)$$

$$f_{i+2} = -f_i - 2hf_i^{(1)} - 2h^2 f_i^{(2)} - \frac{4}{3}h^3 f_i^{(3)} - \frac{2}{3}h^4 f_i^{(4)} - \frac{4}{15}h^5 f_i^{(5)} + \dots \quad (2.12.5)$$

となるから, 右辺第 1 項目の先導誤差は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f_i \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{4h} &= f_i \left[ f_i^{(1)} - \frac{h^2}{3} f_i^{(3)} + \frac{7}{60} h^4 f_i^{(5)} + \dots \right] \\ &= f_i \frac{\partial f}{\partial x} - f_i \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(h^4) \end{aligned} \quad (2.12.6)$$

高次精度の差分式の作り方にならない,  $\partial^3 f / \partial x^3$  に関わる項を消去することを考える。3 階微分に関する差分近似式

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2) \quad (2.12.7)$$

を用いて上式に加えれば,

$$\begin{aligned} &f_i \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{4h} + f_i \frac{h^2}{3} \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \\ &= f_i \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h} \\ &= f_i \frac{\partial f}{\partial x} + O(h^4) \end{aligned} \quad (2.12.8)$$

したがって, 新たな差分式は,

$$\begin{aligned} &f_i \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h} + |f_i| \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{4h} \\ &= f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h^3}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + O(h^5) \\ &= f \frac{\partial f}{\partial x} + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.12.9)$$

となる。同様な操作をくり返すことによりさらに高次精度の風上差分を導出することができる。上式をみてわかることは Leading Error が 4 階の微係数を含んでいることである。この場合, 2 階の導関数で表される分子拡散より高い導関数であるため, 分子粘性の効果を覆い隠すことがない。

### 2. 1 3 時間進行法

本解析では Marker and Cell Method (MAC 法) により時間進行を行う。MAC 法では Navier-Stokes 方程式の発散をとり、連続の式を考慮することで得られる圧力に関する Poisson 方程式を解くことにより圧力を算出する。実際の手順は  $n$  時間時点での流速を用い、 $n+1$  時点での圧力を求める。求めた圧力を運動量方程式に代入することにより  $n+1$  時点での流速を得る。図 2. 5 に解析のフローチャートを示す。

本解析では輸送方程式の時間積分には Euler-implicit 法を、移流項以外の空間微分項には 2 次精度の中心差分を用いて近似する。移流項は流速成分には 3 次精度風上差分、 $k$  および  $\varepsilon$  には 1 次精度風上差分を用いて近似する。例えば流速成分について示せば以下のようなになる。

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + U^{n+1} \nabla \cdot U^{n+1} = -\nabla P^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 U^{n+1} \quad (2.13.1)$$

ただし上式のように、Navier-Stokes 方程式の移流項は非線形項であるため、 $U^{n+1}$  については直接には解けないため、以下のように線形化して取り扱う。

$$U^{n+1} \nabla \cdot U^{n+1} \approx U^n \nabla \cdot U^{n+1} \quad (2.13.2)$$

一般に流れ場各所の乱流統計量を把握することが目的で行われる解析においては時間積分には、数値粘性が小さい高精度の陽解法を用いることが要求される。しかし本論文における解析では以下に示すような理由から敢えて上記のような陰解法を用いることとした。

(1) 空力振動応答の変化を追うため、本論文で扱うような空力弾性問題では振動応答あるいは非定常空気力の確率統計量を得ることが目的であるため、それらが時間に対して不変になるまで無次元時間にして数百～数千にわたる追跡が必要となる。この場合、 $\Delta t$  を小さくしなければならぬ陽解法を用いると多大な解析時間が必要となる。

(2) 壁近傍の境界層解像のため、物体の隅角部近傍や物体壁近傍の境界層解像のためにその領域では著しく小さな格子間隔が設定されるため、もし陽解法を用いた場合、Courant 数の要請によって  $\Delta t$  は非常に小さく制限され、実質的な時間進行が困難となる。

(3) 物体に作用する空気力の把握。本解析の目的は物体に作用する空気力の把握にあり、流れ場の詳細な乱流統計量は主要な目的ではない。微細な渦構造よりも物体と同スケールの大きさの渦構造が空気力生成に最も重要であるという考えに立ってそれらを捕らえることを第一とした。

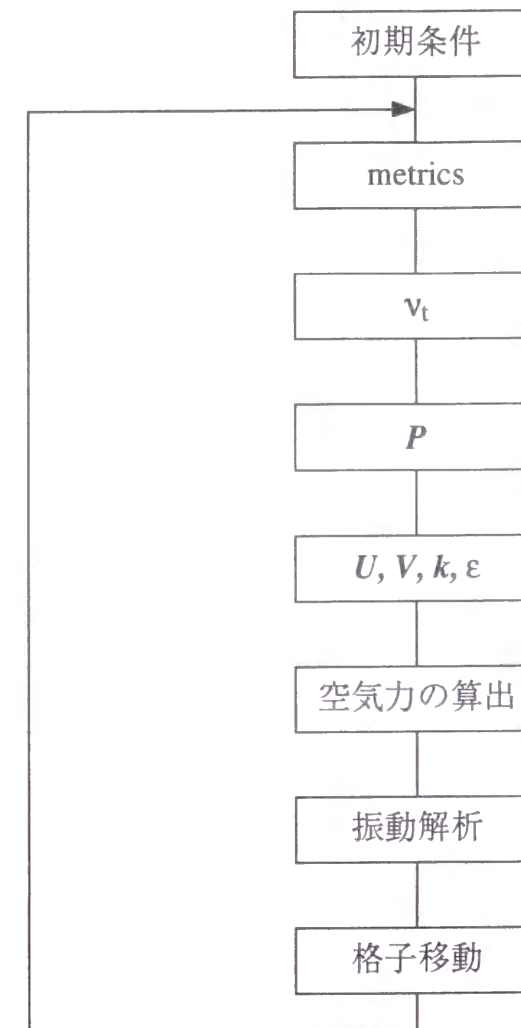


図 2. 5 解析のフローチャート

最終的に解くべき差分式は以下に示すようになる。U成分については以下になる。

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + J^{-1} \left[ \left\{ - (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\eta + (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\eta \right\} \frac{U_{i-2,j}^{n+1} - 8U_{i-1,j}^{n+1} + 8U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i+2,j}^{n+1}}{12\Delta\xi} \right. \\
& \quad \left. + \left| -x_\eta (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) + y_\eta (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) \right| \frac{U_{i-2,j}^{n+1} - 4U_{i-1,j}^{n+1} + 6U_{i,j}^{n+1} - 4U_{i+1,j}^{n+1} + U_{i+2,j}^{n+1}}{4\Delta\xi} \right] \\
& \quad + J^{-1} \left[ \left\{ - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right\} \frac{U_{i,j-2}^{n+1} - 8U_{i,j-1}^{n+1} + 8U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j+2}^{n+1}}{12\Delta\eta} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right\} \frac{U_{i,j-2}^{n+1} - 4U_{i,j-1}^{n+1} + 6U_{i,j}^{n+1} - 4U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j+2}^{n+1}}{4\Delta\eta} \right] \\
& = -J^{-1} \left\{ \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_\xi + \frac{2}{3} \left( \frac{k_{i+1,j}^n - k_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{k_{i,j+1}^n - k_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \right\} \\
& \quad + \left( \nu + \nu_{i,j}^n \right) \left( \alpha \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{U_{i+1,j+1}^{n+1} - U_{i+1,j-1}^{n+1} - U_{i-1,j+1}^{n+1} + U_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right. \\
& \quad \left. + \gamma \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right) \quad (2.13.3) \\
& \quad + 2J^{-2} \left( \frac{\nu_{i+1,j}^n - \nu_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{\nu_{i,j+1}^n - \nu_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \left( \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \\
& \quad + J^{-2} \left( -\frac{\nu_{i+1,j}^n - \nu_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{\nu_{i,j+1}^n - \nu_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_\xi \right) \\
& \quad \left( -\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_\xi + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_\xi \right)
\end{aligned}$$

V成分については以下になる。

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + J^{-1} \left[ \left\{ - (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\eta + (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\eta \right\} \frac{V_{i-2,j}^{n+1} - 8V_{i-1,j}^{n+1} + 8V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i+2,j}^{n+1}}{12\Delta\xi} \right. \\
& \quad \left. + \left| -x_\eta (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) + y_\eta (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) \right| \frac{V_{i-2,j}^{n+1} - 4V_{i-1,j}^{n+1} + 6V_{i,j}^{n+1} - 4V_{i+1,j}^{n+1} + V_{i+2,j}^{n+1}}{4\Delta\xi} \right] \\
& \quad + J^{-1} \left[ \left\{ - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right\} \frac{V_{i,j-2}^{n+1} - 8V_{i,j-1}^{n+1} + 8V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j+2}^{n+1}}{12\Delta\eta} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right\} \frac{V_{i,j-2}^{n+1} - 4V_{i,j-1}^{n+1} + 6V_{i,j}^{n+1} - 4V_{i,j+1}^{n+1} + V_{i,j+2}^{n+1}}{4\Delta\eta} \right] \\
& = -J^{-1} \left\{ -\frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_\xi + \frac{2}{3} \left( -\frac{k_{i+1,j}^n - k_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{k_{i,j+1}^n - k_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_\xi \right) \right\} \\
& \quad + \left( \nu + \nu_{i,j}^n \right) \left( \alpha \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{V_{i+1,j+1}^{n+1} - V_{i+1,j-1}^{n+1} - V_{i-1,j+1}^{n+1} + V_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad + \gamma \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \Big) \\
& \quad + 2J^{-2} \left( -\frac{\nu_{i+1,j}^n - \nu_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{\nu_{i,j+1}^n - \nu_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_\xi \right) \left( -\frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_\xi \right) \\
& \quad + J^{-2} \left( \frac{\nu_{i+1,j}^n - \nu_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{\nu_{i,j+1}^n - \nu_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \\
& \quad \left( -\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_\xi + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \quad (2.13.4)
\end{aligned}$$

kについては以下になる。

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{i,j}^{n+1} - k_{i,j}^n}{\Delta t} + J^{-1} \left[ \left\{ - (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\eta + (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\eta \right\} \frac{k_{i+1,j}^{n+1} - k_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right. \\
& \quad \left. + \left| - (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\eta + (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\eta \right| \frac{k_{i+1,j}^{n+1} - 2k_{i,j}^{n+1} + k_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right] \\
& \quad + J^{-1} \left[ \left\{ - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right\} \frac{k_{i,j+1}^{n+1} - k_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right. \\
& \quad \left. + \left| - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right| \frac{k_{i,j+1}^{n+1} - 2k_{i,j}^{n+1} + k_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right] \\
& = \left( \nu + \frac{\nu_{i,j}^n}{\sigma_k} \right) \left( \alpha \frac{k_{i+1,j}^{n+1} - 2k_{i,j}^{n+1} + k_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{k_{i+1,j+1}^{n+1} - k_{i+1,j-1}^{n+1} - k_{i-1,j+1}^{n+1} + k_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right. \\
& \quad \left. + \gamma \frac{k_{i,j+1}^{n+1} - 2k_{i,j}^{n+1} + k_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{k_{i+1,j}^{n+1} - k_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{k_{i,j+1}^{n+1} - k_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right) \quad (2.13.5) \\
& \quad + \sigma_k^{-1} J^{-2} \left\{ \left( \frac{\nu_{i+1,j}^{n+1} - \nu_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{\nu_{i,j+1}^{n+1} - \nu_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \left( \frac{k_{i+1,j}^{n+1} - k_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{k_{i,j+1}^{n+1} - k_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_\xi \right) \right. \\
& \quad \left( -\frac{\nu_{i+1,j}^{n+1} - \nu_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{\nu_{i,j+1}^{n+1} - \nu_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_\xi \right) \left( -\frac{k_{i+1,j}^{n+1} - k_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{k_{i,j+1}^{n+1} - k_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_\xi \right) \Big\} \\
& \quad + P_{k i,j}^n - \varepsilon_{i,j}^n
\end{aligned}$$

εについては以下になる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon_{i,j}^{n+1} - \varepsilon_{i,j}^n}{\Delta t} + J^{-1} \left[ \left\{ - (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\eta + (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\eta \right\} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right. \\
& \quad \left. + \left| - (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\eta + (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\eta \right| \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - 2\varepsilon_{i,j}^{n+1} + \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right] \\
& \quad + J^{-1} \left[ \left\{ - (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_\xi + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_\xi \right\} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{n+1} - \varepsilon_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| (U_{i,j}^n - x_{\tau i,j}^n) y_{\xi} + (V_{i,j}^n - y_{\tau i,j}^n) x_{\xi} \right| \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - 2\varepsilon_{i,j}^{n+1} + \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\eta} \Bigg] \\
= & \left( v + \frac{v_{i,j}^n}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \left( \alpha \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - 2\varepsilon_{i,j}^{n+1} + \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{n+1} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{n+1} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{n+1} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right. \\
& \left. + \gamma \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{n+1} - 2\varepsilon_{i,j}^{n+1} + \varepsilon_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{n+1} - \varepsilon_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right) \\
& + \sigma_{\varepsilon}^{-1} J^{-2} \left\{ \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_{\eta} - \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_{\xi} \right) \left( \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} y_{\eta} - \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{n+1} - \varepsilon_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} y_{\xi} \right) \right. \\
& \left. \left( -\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_{\eta} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_{\xi} \right) \left( -\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{n+1} - \varepsilon_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} x_{\eta} + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{n+1} - \varepsilon_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} x_{\xi} \right) \right\} \\
& + (C_{\varepsilon_1} P_{k i,j}^n - C_{\varepsilon_2} \varepsilon_{i,j}^n) \frac{\varepsilon_{i,j}^{n+1}}{k_{i,j}^{n+1}}
\end{aligned} \tag{2.13.6}$$

圧力の Poisson 方程式については以下になる。

$$\begin{aligned}
& \alpha \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{P_{i+1,j+1}^{n+1} - P_{i+1,j-1}^{n+1} - P_{i-1,j+1}^{n+1} + P_{i-1,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi\Delta\eta} + \gamma \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} \\
& + \lambda_x \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \\
= & -2v_{i,j}^n \left\{ \alpha \frac{D_{i+1,j}^{n+1} - 2D_{i,j}^{n+1} + D_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{D_{i+1,j+1}^{n+1} - D_{i+1,j-1}^{n+1} - D_{i-1,j+1}^{n+1} + D_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right. \\
& \left. + \gamma \frac{D_{i,j+1}^{n+1} - 2D_{i,j}^{n+1} + D_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{D_{i+1,j}^{n+1} - D_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{D_{i,j+1}^{n+1} - D_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right\} \\
& - 2J^{-1} \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_{\eta} - \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_{\xi} \right) \\
& \cdot \left\{ \alpha \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{U_{i+1,j+1}^{n+1} - U_{i+1,j-1}^{n+1} - U_{i-1,j+1}^{n+1} + U_{i-1,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi\Delta\eta} \right. \\
& \left. + \gamma \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right. \\
& \left. + J^{-1} \left( \frac{D_{i+1,j}^n - D_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_{\eta} - \frac{D_{i,j+1}^n - D_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_{\xi} \right) \right\} \\
& - 2J^{-1} \left( -\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_{\eta} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_{\xi} \right) \\
& \cdot \left\{ \alpha \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^2} + 2\beta \frac{V_{i+1,j+1}^{n+1} - V_{i+1,j-1}^{n+1} - V_{i-1,j+1}^{n+1} + V_{i-1,j-1}^{n+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right. \\
& \left. + \gamma \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \lambda_x \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \lambda_y \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J^{-1} \left( -\frac{D_{i+1,j}^n - D_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_{\eta} + \frac{D_{i,j+1}^n - D_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_{\xi} \right) \Bigg] \\
= & -2 \left[ -J^{-3} \left\{ y_{\eta}^2 (y_{\eta} x_{\xi\xi} - x_{\eta} y_{\xi\xi}) - 2y_{\xi} y_{\eta} (y_{\eta} x_{\xi\eta} - x_{\eta} y_{\xi\eta}) + y_{\xi}^2 (y_{\eta} x_{\eta\eta} - x_{\eta} y_{\eta\eta}) \right\} \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} \right. \\
& + J^{-3} \left\{ y_{\eta}^2 (y_{\xi} x_{\xi\xi} - x_{\xi} y_{\xi\xi}) - 2y_{\xi} y_{\eta} (y_{\xi} x_{\xi\eta} - x_{\xi} y_{\xi\eta}) + y_{\xi}^2 (y_{\xi} x_{\eta\eta} - x_{\xi} y_{\eta\eta}) \right\} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \\
& + J^{-2} \left( y_{\eta}^2 \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta\xi^2} + y_{\xi}^2 \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta\eta^2} \right. \\
& \left. \left. - y_{\xi} y_{\eta} \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n - v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right) \right] \\
& \cdot J^{-1} \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_{\eta} - \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_{\xi} \right) \\
= & -2 \left[ -J^{-3} \left\{ x_{\eta}^2 (y_{\eta} x_{\xi\xi} - x_{\eta} y_{\xi\xi}) - 2x_{\xi} x_{\eta} (y_{\eta} x_{\xi\eta} - x_{\eta} y_{\xi\eta}) + x_{\xi}^2 (y_{\eta} x_{\eta\eta} - x_{\eta} y_{\eta\eta}) \right\} \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} \right. \\
& + J^{-3} \left\{ x_{\eta}^2 (y_{\xi} x_{\xi\xi} - x_{\xi} y_{\xi\xi}) - 2x_{\xi} x_{\eta} (y_{\xi} x_{\xi\eta} - x_{\xi} y_{\xi\eta}) + x_{\xi}^2 (y_{\xi} x_{\eta\eta} - x_{\xi} y_{\eta\eta}) \right\} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \\
& + J^{-2} \left( x_{\eta}^2 \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta\xi^2} + x_{\xi}^2 \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta\eta^2} \right. \\
& \left. \left. - x_{\xi} x_{\eta} \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n - v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right) \right] \\
& \cdot J^{-1} \left( -\frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_{\eta} - \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_{\xi} \right) \\
= & -2 \left[ 2J^{-3} \left\{ -x_{\eta} y_{\eta} x_{\xi\xi} - x_{\xi} y_{\xi} x_{\eta\eta} + (x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}) x_{\xi\eta} \right\} y_{\eta} \right. \\
& \left. - \left\{ -x_{\eta} y_{\eta} y_{\xi\xi} - x_{\xi} y_{\xi} y_{\eta\eta} + (x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}) y_{\xi\eta} \right\} x_{\eta} \right] \cdot \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} \\
& + 2J^{-3} \left\{ -x_{\eta} y_{\eta} x_{\xi\xi} - x_{\xi} y_{\xi} x_{\eta\eta} + (x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}) x_{\xi\eta} \right\} y_{\xi} \\
& \left. - \left\{ -x_{\eta} y_{\eta} y_{\xi\xi} - x_{\xi} y_{\xi} y_{\eta\eta} + (x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}) y_{\xi\eta} \right\} x_{\xi} \right] \cdot \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \\
& + 2J^{-2} \left\{ x_{\eta} y_{\eta} \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta\xi^2} + x_{\xi} y_{\xi} \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta\eta^2} \right. \\
& \left. - 2J^{-2} (x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}) \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n - v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right\} \tag{2.13.7} \\
& \cdot J^{-1} \left( -\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} x_{\eta} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} x_{\xi} + \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} y_{\eta} - \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} y_{\xi} \right) + \frac{D_{i,j}^n}{\Delta t}
\end{aligned}$$



## 2. 1 4 空気力の算出

Bluff body の解析では、物体に作用する空気力を正確に求める必要がある。以下には形状抵抗と摩擦抵抗を含めた空気力係数の算出方法について示す。物体表面を分割したときの第  $k$  エLEMENT に作用する応力ベクトルの成分  $f_x, f_y$  は、

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}_k \quad (2.14.1)$$

のように表せる。ここに  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$  は応力テンソル、 $n_x, n_y$  は  $x, y$  軸についての方向余弦である。 $x, y$  軸方向の合力  $F_x, F_y$  は以下のように表せる。

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \sum_k dS_k \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}_k \quad (2.14.2)$$

ここに  $dS_k$  は第  $k$  エLEMENT の負担面積を表す。RANS では応力テンソルは流れ場の解析結果の periodic 成分  $U, V, P$  により以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} -P + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) & -P + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix}_k \quad (2.14.3)$$

ここで注意すべき点は、上記のようにして求めた空気力は periodic 成分のみから成っていることである。現在の RANS では圧力に関して stochastic 成分が解かれていないため、空気力の stochastic 成分を算出することはできない。したがって変動空気力は periodic 成分の変動のみであり、常に真値よりは小さく評価される。この点に関しては 3. 3 で詳しく示す。

## 2. 1 5 格子生成

一般座標系では境界適合格子 (Body Fitted Coordinate) が用いられる。物体に沿った格子生成を行う方法には 3 つの方法が一般的である。

1. ある種の偏微分方程式を用いる方法 (Analytical)
2. 代数的に生成する方法 (Algebraic)

このうち前者では、

1. 楕円型 (Elliptical) 偏微分方程式を用いる方法
2. 放物型 (Parabolic) 偏微分方程式を用いる方法
3. 双曲型 (Hyperbolic) 偏微分方程式を用いる方法
4. 等角写像を用いる方法 (Conformal mapping)

がある。

本論文では無限に広い空間中に置かれた物体まわりの流れ、いわゆる開境界問題を扱うため、物体境界のみが規定され、他方は任意に定めることができる。したがって放物型偏微分方程式を用いる方法によっても可能である。ただし、内部空間等への拡張性も考慮に入れ、以下では楕円型偏微分方程式を用いる方法について示す。楕円型偏微分方程式を用いる方法では滑らかな格子が生成できる点に特徴がある。解析では物体境界近くの境界層の解像度を高めるためにこの付近に格子を集中させる必要がある。楕円型偏微分方程式を用いる方法ではこのような格子の制御がソース項に工夫をこらすことで可能で、任意の格子線または格子点にまわりの格子を寄せたり離したりすることができる。本論文では初期格子として代数的に発生させる方法によりおおまかな格子生成を行い、続いて楕円型偏微分方程式を用いる方法により所要の格子密度、滑らかさおよび境界付近の直交性を確保する 2 段階の手順をふんだ。本論文では後者に Steger-Sorenson(1979)<sup>14)</sup> の方法を用いた。

楕円型方程式として最も簡単なのは Laplace 方程式であるが、通常は格子分布を制御するために Poisson 方程式を用いる。2 次元物理空間の格子点座標を  $(x, y)$ 、その計算空間での座標を  $(\xi, \eta)$  とし、境界での格子点が与えられているとすると、内部点の写像関係は以下の偏微分方程式を解くことにより得られる。

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (2.15.1)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (2.15.2)$$

上式を計算空間に変換するために (2. 9. 18) および (2. 9. 19) 式の独立変数と従属変数を入れ替えると、 $x, y$  に関する次の楕円型偏微分方程式を得る。

$$\alpha r_{\xi\xi} - 2\beta r_{\xi\eta} + \gamma r_{\eta\eta} = -J^{-2} [P(\xi, \eta) r_{\xi} + Q(\xi, \eta) r_{\eta}] \quad (2.15.3)$$

内部境界 (物体面) を  $\eta=0$ 、外部境界を  $\eta_{max}$  とし、これらの境界において格子幅とその傾き

の制御を行うことを考える。Stegerらの方法では、この4つの幾何学的拘束条件を満たすよう  $P$ ,  $Q$  を以下の形で与えている。

$$P(\xi, \eta) = p_1(\xi)e^{-a_1\eta} + p_2(\xi)e^{-a_2(\eta_{\max}-\eta)} \quad (2.15.4)$$

$$Q(\xi, \eta) = q_1(\xi)e^{-b_1\eta} + q_2(\xi)e^{-b_2(\eta_{\max}-\eta)} \quad (2.15.5)$$

ここで境界上で  $P(\xi, 0) \equiv p_1(\xi)$ ,  $Q(\xi, 0) \equiv q_1(\xi)$ ,  $P(\xi, \eta_{\max}) \equiv p_2(\xi)$ ,  $Q(\xi, \eta_{\max}) \equiv q_2(\xi)$  であるから、 $p_1(\xi)$ ,  $p_2(\xi)$ ,  $q_1(\xi)$ ,  $q_2(\xi)$  は境界上の  $P(\xi, \eta)$  および  $Q(\xi, \eta)$  の値として得られる。(2. 15. 3) 式で境界上で格子が直交するとすれば、 $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = -J^{-2} \nabla \xi \cdot \nabla \eta = 0$  となることを考慮し、 $r_\xi$  または  $r_\eta$  との内積をとれば  $P$  および  $Q$  に関して次式を得る。

$$P = -J^2 \left( \frac{\alpha}{\gamma} r_\xi \cdot r_{\xi\xi} + r_\xi \cdot r_{\eta\eta} \right), \quad Q = -J^2 \left( r_\eta \cdot r_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{\alpha} r_\eta \cdot r_{\eta\eta} \right) \quad (2.15.6)$$

ここで  $r_\eta$  は

$$r_\eta = x_\eta i + y_\eta j \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \eta} i + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} j \quad (2.15.7)$$

である。 $\Delta \eta = 1$  とすると  $|r_\eta| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  であるから、 $|r_\eta|$  は境界と第1格子線までの距離としてあらかじめ指定される。 $r_\xi$ ,  $r_{\xi\xi}$  および  $\alpha = |r_\xi|^2$  は境界上にあらかじめ与えられた点分布から計算される。 $r_{\eta\eta}$  は反復計算の過程で得られる格子点分布から計算される。

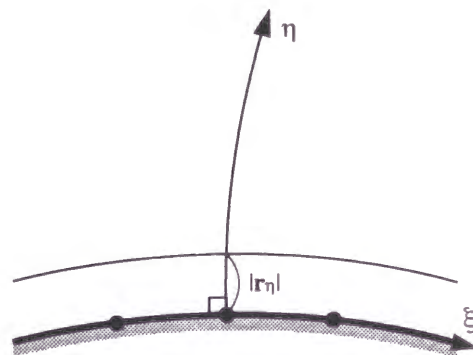


図2. 6 境界近傍の格子

## 参考文献

- 1) 東京大学出版会, 数値流体力学シリーズ「3. 乱流解析」, 1995
- 2) Kato, M. and Launder, B. E. : The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders, *Ninth symposium on "Turbulent shear flows"* Kyoto Japan, 1993.8
- 3) Rodi, W. : Experience with tow-layer models combining the  $k-\epsilon$  model with a one-equation model near the wall, *AIAA-91-0216*, 1991
- 4) Iacovides, H. and Launder, B.E., "The numerical simulation of flow and heat transfer in tubes in orthogonal-mode rotation", *Proc. 6th Symp. on Turbulent Shear Flows*, Toulouse, France, 1987.
- 5) Chen, H.C. and Patel, V.C., "Near-wall turbulence models for complex flows including separation", *AIAA J.*, 26, 1988, 641-648.
- 6) Chen, H.C. and Patel, V.C., "Evolution of axisymmetric wakes from attached and separated flows", in *Turbulent Shear Flows 6*, Springer Verlag, 1989, 215-231.
- 7) Wolfshtein, M., "The velocity and temperature distribution in one-dimensional flows with turbulence augmentation and pressure gradient", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12, 1969, 301-318.
- 8) Norris, L.H. and Reynolds, W.C., Rept. No. FM-10, Stanford Univ., Dept. Mech. Eng., 1975
- 9) Franke, R. and Rodi, W. : Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models, *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, 20-1, Technical University of Munch, 1991.9
- 10) 保原充, 大宮司久明 編: 数値流体力学, 東京大学出版会, 1992
- 11) Hirt, C.W. and Harlow, F.H. : *J. Comp. Phys.* 2, 1967, 114.
- 12) 泉元・谷口伸行・川田裕・小林敏雄・足立武司, 円柱周りの3次元流動解析(第一報, 静止円柱の場合), 機論, 60-579, B (1994), 207 - 214.
- 13) Kawamura, T. and Kuwahara, K. : Computation of high Reynolds number flow around circular cylinder with surface roughness, *AIAA paper 84-0340*, 1984
- 14) Steger, J.L. and Sorenson, R.L. 1979 : Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations. *J. Comp. Phys.*, 33, 405-410.





## 第3章 種々の断面辺長比を有する矩形断面柱の空力特性評価に関する 修正型 $k-\epsilon$ モデルの適用性の検討

### 3. 1 概要

矩形断面は高層建築物や橋梁等の構造物に見られる基本的な断面形状であり、その空力性状を詳しく調べることはこれらの構造物の空力設計にとって重要である。矩形断面は非流線型であるため、断面前縁から剥離したせん断層と後流渦の挙動が流体力発生的主要原因となる。断面前縁から剥離したせん断層や、後流に放出される渦の挙動は断面辺長比により異なるため、抗力係数、揚力係数および放出渦の周期性を表わす Strouhal 数は、断面辺長比  $B/D$  ( $B$ : 流れ方向の長さ、 $D$ : 見つけ幅) により複雑に変化することが知られている。中口ら(1968)<sup>1)</sup>は一樣流中における種々の辺長比を有する矩形断面柱について、風洞実験により系統的に調べ、断面辺長比  $B/D=0.6$  付近に抗力係数のピークが存在することや、 $B/D=2.8$  および  $6.0$  付近で Strouhal 数が不連続に変化すること等の矩形断面柱の特徴的な性質を示した。矩形断面柱の空力特性は、前縁から剥離したせん断層が断面側面に再付着するかしないかによって説明されることから、辺長比により完全剥離型と再付着型に、また再付着型に関して周期的再付着型と定常的再付着型に分類されている。

矩形断面柱に作用する流体力はそのまわりの流れ場から及ぼされるものである。したがってこれらの空力特性を把握しようとする場合には周囲流体の運動について知る必要がある。現在、この目的のために用いられている流体解析手法は大別して Navier-Stokes 方程式をそのまま扱う方法 (direct simulation) となんらかの平均化を施した平均化 Navier-Stokes 方程式を扱うものに分けられる。前者の場合、特に Reynolds 数が大きい場合、移流項の非線形性に伴う数値的不安定性に対して、移流項に関して上流化を施し数値的安定化を図る方法がとられている。この手法によるものとして、田村・伊藤(1996)<sup>2)</sup>は3次精度風上差分法(Kawamura & Kuwahara 1989)<sup>3)</sup>を用いて、一樣流中における種々の辺長比を有する矩形断面柱についての一連の解析を行ない、既往の諸実験から得られた空力特性を良い精度で再現した。

Navier-Stokes 方程式に平均化を施して扱う方法では、現在のところ subgrid scale モデルと RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equation) モデルによる方法に分類される。Murakami & Mochida(1995)<sup>4)</sup>は、標準 Smagorinsky モデルによって、一樣流中における  $B/D=1.0$  の矩形断面柱まわりの流れ場を解き、矩形断面に作用する空力特性値のみならず、周囲流体場における乱流統計量の再現性に関しても既往の諸実験結果と良い対応を得た。さらに持田・村上ら(1996)<sup>5)</sup>、野澤・田村(1998)<sup>6)</sup>は、標準 Smagorinsky モデルにおいては一定である Smagorinsky 定数を時空間的に変動するものとして扱う Dynamic Subgrid Scale モデルを  $B/D=1.0$  の矩形断面柱に対して適用し、乱流統計量の予測に関して改善を試みた。

以上に述べた風上差分による direct simulation および subgrid scale モデルを用いる方法はいずれも 3 次元解析であり、流れと直角となる断面軸方向に 10～20 点程度の格子分割数を設ける必要がある。また、3 次精度風上差分を用いる方法は数値粘性により小スケールの乱流変動を処理するという点において subgrid scale モデルの考え方に近い。これらの subgrid scale モデルによる手法およびそれに類する手法で得られる結果は、十分な空間解像度が保証された場合においてのみ有意であるため、一般に多くの記憶容量や計算時間を必要とする。

Ohya et al.(1992)<sup>7)</sup>は  $Re=10^3$  における、辺長比  $6.0 \leq B/D \leq 8.0$  の扁平な矩形断面柱に関する一連の Strouhal 数の不連続性について、風上差分を用いた 2 次元解析により再現されることを示した。一方、 $B/D=1.0$  矩形断面柱周りの流れ場構造の Reynolds 数による変化について、野津・田村(1997)<sup>8)</sup>は  $Re=2 \times 10^2$  で既に流れの 3 次元性が生じ始めていること、 $Re=10^3$  では渦放出に微細な渦構造が存在することを 3 次元数値解析により示した。これらの結果が示すように矩形断面柱周りの流れ場は比較的低い Reynolds 数領域では 2 次元性を保つものの、ある程度以上の Reynolds 数になるとスパン方向での運動量輸送が無視できなくなる。その結果、数値解析上何らかの適切な運動量拡散機構の導入がない限り 2 次元解析では定性的にも流れ場の再現が難しくなる。したがって 2 次元解析が定量的にも実験値と一致するのは流れの 3 次元性が卓越しない  $Re < 10^3$  の比較的低い Reynolds 数域に限られる。

それに対して RANS モデルによる方法は、高 Reynolds 数域においても 2 次元解析を行うことができる。これはスパン方向変動を均質 (homogeneous) な乱流と仮定すると、スパン方向平均とアンサンブル平均は等価であるという事実による。この考え方に基づき、Franke & Rodi(1991)<sup>9)</sup>は応力方程式モデル (Reynolds-Stress Equation model) と wall function の組み合わせにより、一様流中における  $B/D=1.0$  の矩形断面柱の 2 次元非定常解析を行い、Strouhal 数と平均抗力係数について精度よく再現できることを示した。2 方程式モデルである標準  $k-\epsilon$  モデルによる非定常解析では、wall function を用いると渦放出は見られず、two layer モデルを用いても周期的渦放出が弱く、その結果、標準  $k-\epsilon$  モデルでは空力特性値にも満足な結果は得られなかった。これは等方渦粘性近似により風上隅角部近傍において乱流エネルギーが過剰生産されることにより、剥離が抑えられ渦放出が弱められるためである。Kato & Launder(1993)<sup>10)</sup>はこの点に関し impinging 領域における流れの irrotationality に着目し、乱流エネルギーの生産項を渦度テンソルと歪み速度テンソルの積により修正して表わした生産項修正型  $k-\epsilon$  モデルを提案した。そして  $B/D=1.0$  の矩形断面柱に適用し、空力特性値や乱流統計量に大きな改善がなされることを示した。さらに加藤(1997)<sup>11)</sup>は上述の生産項修正型  $k-\epsilon$  モデルと一般化対数則により極めて少ない格子点数によっても  $B/D=1.0$  の角柱の非定常空気力および渦励振を再現することが可能であることを示した。一方、Deng(1994)<sup>12)</sup>は Baldwin-Lomax モデルにより正方形角柱まわりの流れ場を解き、空力特性および乱流統計量を実験と詳細に比較し良好な一致を得た。

また、河島・河村(1996)<sup>13)</sup>は低 Reynolds 数型  $k-\epsilon$  モデルによって正方形まわりの流れ場を計算している。

ところで、現在までのところ RANS モデルの矩形断面柱への適用のほとんどは完全剥離型断面である  $B/D=1.0$  に限られている。岡島・坂井(1991)<sup>14)</sup>は標準  $k-\epsilon$  モデルによって  $Re=10^4$  の  $B/D=0.6, 1.0, 2.0$  の断面辺長比を有する矩形断面柱に関しての解析を行なったが、それより大きな断面辺長比について検討された例はない。それによると  $B/D=0.6, 1.0$  に関しては極めて規則的な渦放出が再現され、抗力係数や Strouhal 数は実験値に近いものの、 $B/D=2.0$  では Strouhal 数は  $St=0.16$  と実験値に比較して高くかつ揚力変動振幅は実験値に比べて著しく小さくなることを報告している。

$2.0 < B/D < 2.8$  の矩形断面柱は  $Re=10^4$  の領域で剥離せん断層の側面上への非定常な再付着に伴ない、2 つの渦放出モードが存在することが示されている(岡島 1983)<sup>15)</sup>。また、既に述べたように  $B/D=2.8$  および 6.0 近傍では Strouhal 数の変化に不連続性が見られるなど、矩形断面柱には数値解析的観点から検証すべき多くの現象が内在している。現状の RANS モデルがこれらの多様な現象に関してどの程度まで再現性を有するかを検証することは RANS モデルの今後の発展に向けた改善にとって重要である。以下本論文では、RANS モデルとして 2 方程式型モデルである修正型  $k-\epsilon$  モデルを取り上げ、一様な流れの中に置かれた断面辺長比  $0.6 \leq B/D \leq 8.0$  の矩形断面柱を対象に、その空力特性の再現性を中心に適用性について検討する。

### 3. 2 解析方法

#### 3. 2. 1 基礎方程式

Reynolds 平均された非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は以下のように表される。

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( P + \frac{2}{3}k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \nu_t \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.1)$$

ここに  $\nu_t$  は渦粘性係数で、 $\nu_t = C_\mu k^2 / \epsilon$  と表わせる。平均化を施す際、スパン方向に関して  $\partial(\phi) / \partial x_3 = 0$ 、すなわちスパン方向に均質、かつ  $U_3=0$  であるとする (3. 1) 式は 2 次元となる。乱流エネルギー  $k$  と乱流エネルギーの散逸率  $\epsilon$  は以下の輸送方程式から求められる。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon \quad (3.2)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + (C_{\epsilon_1} P_k - C_{\epsilon_2} \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \quad (3.3)$$

各モデルパラメータは、 $C_\mu=0.09$ ,  $C_{\epsilon_1}=1.44$ ,  $C_{\epsilon_2}=1.92$ ,  $\sigma_k=1.0$ ,  $\sigma_\epsilon=1.3$  で標準  $k-\epsilon$  モデルのもの



と同じである。標準  $k-\epsilon$  モデルではこれらの定数は実験の時間平均値から同定されているが、アンサンブル平均に基づいた場合、厳密にはこれらの適用の妥当性に関しては疑問のあるところである。しかし第3節に示される解析結果から判断するとモデル定数に起因すると思われる大きな不合理は特に見られなかった。

$$P_k = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.4)$$

$P_k$  は乱流エネルギー  $k$  の生産項である。標準  $k-\epsilon$  モデルではこれは以下のように表わされる。しかしこのままでは風上隅角部近傍において過剰な乱流エネルギーの生産があることが知られている。ここでは流れの irrotationality に着目して生産項を以下のように修正した Kato & Launder<sup>(10)</sup> による生産項修正型モデルを用いた。

$$P_k = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (3.5)$$

### 3. 2. 2 物体壁面近傍の乱流モデルの取扱い

剥離や再付着が伴う物体境界近傍の取扱いは矩形断面まわりの流れ場の再現には重要である。従来の  $k-\epsilon$  モデルでは経済性の観点から物体境界近傍には多くの格子点をとらずに一般化対数則を仮定する方法がとられている。しかし矩形断面柱まわりの流れ場のように剥離や再付着が生じる場合、一般化対数則の精度は高くない。また対数則を用いることによって Reynolds 数効果を正確に表現できなくなる。そこで本解析では以下に示す低 Reynolds 数型 1 方程式モデル（以下、two-layer モデルとよぶ）を用いた。すなわち、 $k$  方程式については物体表面上で  $k=0$  とし、壁近傍の  $\epsilon$  は  $\epsilon$  方程式を解く代わりに乱流エネルギー  $k$  と長さスケール  $l_\epsilon$  により定める。 $\epsilon$  方程式を解かない位置での渦粘性  $\nu_t$  は、 $\epsilon$  と同様に乱流エネルギー  $k$  と長さスケール  $l_\mu$  により計算する。

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\epsilon}, \quad \nu_t = C_\mu k^{1/2} l_\mu \quad (3.6)$$

長さスケール  $l_\epsilon$ ,  $l_\mu$  は乱流渦スケール  $l (= \kappa y)$  に比例し、次式により求める。

$$l_\mu = C_l y \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R_{\epsilon y}}{A_\mu} \frac{25}{A^+} \right) \right], \quad l_\epsilon = \frac{C_l y}{1 + 5.3 / R_{\epsilon y}} \quad (3.7)$$

ここでその中に含まれる定数はそれぞれ、 $C_l = \kappa C_\mu^{-3/4}$ ,  $A_\mu = 50.5$ ,  $A^+ = 25$  である。Two-layer モデル（Norris & Reynolds 1975<sup>(16)</sup>, Rodi 1991<sup>(17)</sup>）の特徴は  $l_\epsilon$  と  $l_\mu$  が乱流 Reynolds 数  $Re_y (= k^{1/2} y / \nu)$  の

関数になっているため、流れの Reynolds 数効果を表現できる点である。Reynolds 数効果は円柱のような曲面を有する場合の空気力特性を表わすには重要であり、two-layer モデルを用いた嶋田・孟(1997)<sup>(18)</sup> の解析では円柱の平均抗力係数の Reynolds 数変化が再現されている。本解析では two-layer モデルの適用領域は物体近傍の 3 メッシュ程度を目安にした。また、剥離せん断層をできるだけ忠実に解像するために、境界適合格子を用いることで物体境界近傍に可能なかぎり格子を集中させた。

### 3. 2. 3 時間進行、移流項および圧力の解法

以上の方程式系を一般座標系により定式化し差分法により解いた。解法は MAC 法に準じた。流速成分の輸送方程式の移流項には 3 次精度風上差分を、 $k$  と  $\epsilon$  の輸送方程式の移流項には 1 次精度風上差分をそれぞれ用いた。時間に関しては Euler の陰解法を用いた。この際、移流項に関しては線形化して扱った<sup>3)</sup>。一般に流れ場の乱流統計量を得ることを目的とする場合、移流項については explicit に取り扱われる。しかし本解析のように物体近傍に非常に細かな格子を設けた場合、時間刻みに関しては CFL 条件により著しく制限され、解析には多大な時間が必要となる。とくに振動問題への拡張を視野に入れた場合、振動応答の確率統計量が一定になるまでに無次元時間で数百からもの時間進行を行なう必要があり、explicit に解析を行なうことは極めて多くの時間を必要とし得策ではない。これらのことを考慮した上で、本解析では乱流統計量の再現に関する厳密性は多少犠牲にしても、Karman 渦スケールの大きな渦放出現象を再現することを重視し、計算を安定にすすめることを優先した。

圧力は運動量方程式の発散をとることにより次式のように得られる Poisson 方程式を解くことにより求める。

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\nabla_i U_i^n}{\Delta t} \quad (3.8)$$

ここで、(3.8) 式中、右辺第 2 項は Reynolds 応力項により派生した項で、その定義から明らかなように移流項から派生したものであるのものでこれもソース項に含める。

### 3. 2. 4 解析格子および境界条件

解析領域は半径  $30D$  の円でありその中心から  $5D$  風上に物体を配置した。解析ケースおよび解析に用いた格子点数を表 3. 1 に示す。

境界条件を図 3. 1 に示す。流入条件は  $U = U_\infty$  の一様流入とした。乱流エネルギーおよびその散逸率は  $k = 10^{-5} (\text{m}^2/\text{s}^2)$ ,  $\epsilon = 10^{-5} (\text{m}^2/\text{s}^3)$  とした。流出境界では自由流出とした。圧力に関してはすべての外部境界で 0, 物体壁面上で法線方向勾配を 0 とした。Reynolds 数は Lyn(1989)<sup>(19)</sup>



による正方形角柱まわりの流速測定実験にあわせて $Re=2.2 \times 10^4$ とした。比較のために引用した実験もそのほとんどが $Re=10^4$ のオーダーで行なわれている。

表 3. 1 格子分割

$B/D$	格子分割
0.6, 1.0	$200 \times 200$
$1.0 < B/D \leq 8.0$	$320 \times 200$

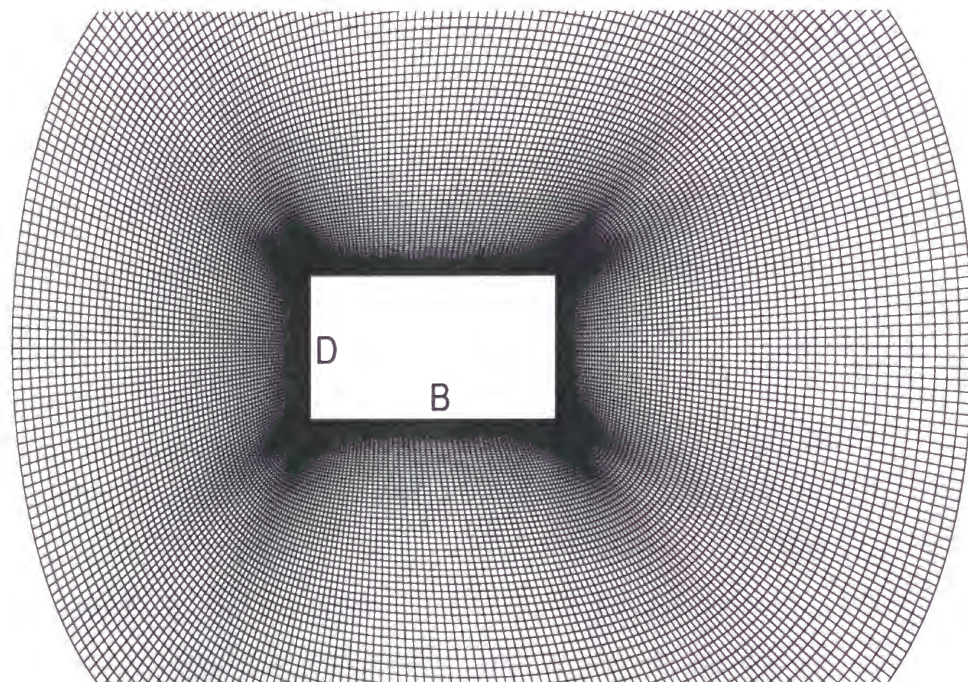
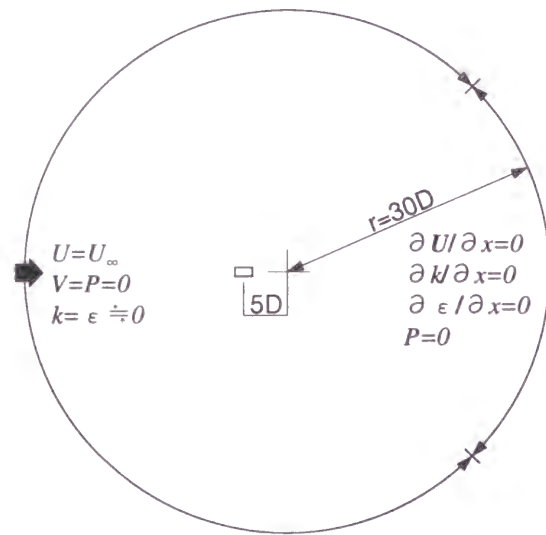
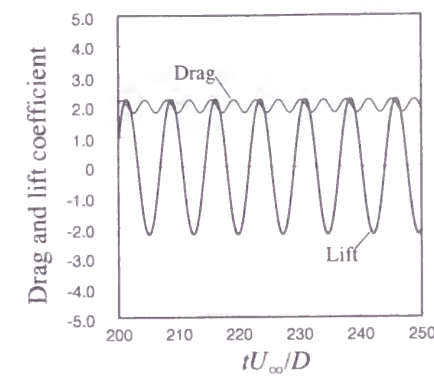


図 3. 1 解析領域および境界条件と解析対象断面近傍の解析格子

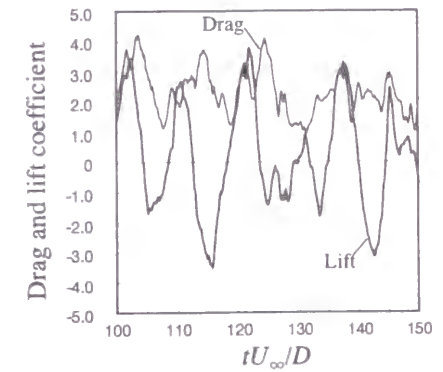
### 3. 3 解析結果

#### 3. 3. 1 解析手法の検証 (辺長比 $B/D=1.0$ の場合)

RANSモデルにおける2次元解析の有効性と解析手法の検証のために、まず実験的にもまた数値解析的研究によっても比較的詳しく調べられている辺長比 $B/D=1.0$ の場合について示す。図3. 2には本解析 (CASE1) および単に $u_3=0$ とした2次元解析 (CASE2) による空気力係数の時系列波形を示す。CASE1では正弦波に近い規則的な変動が得られているのに対し

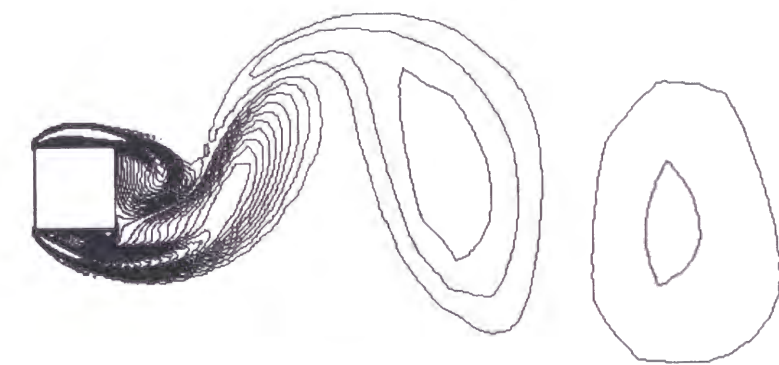


(a)CASE1(本解析)



(b)CASE2(2次元解析)

図 3. 2  $B/D=1.0$  矩形断面柱の変動空気力係数の時系列波形(200 × 100)



(a) CASE1



(b) CASE2

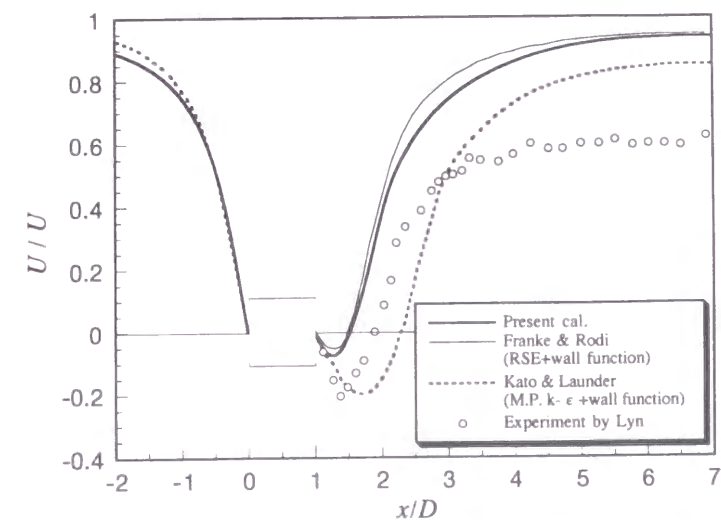
図 3. 3  $B/D=1.0$  矩形断面柱まわりの渦度場(200 × 100)

CASE2では変動は不規則でその振幅は非常に大きい。図3. 3にはこれら2つの解析法によるある瞬間の渦度場の比較を示す。CASE1では整ったKarman渦列が角柱背後に形成されているのに対し、CASE2では放出された渦がまっすぐに流下しない。CASE2のような手法を用いる場合、このような現象はReynolds数が $10^4$ 程度の場合には必ず見られる。これはCASE2では本来スパン方向にも3次元乱流運動により拡散するはずの運動量が拡散できないため図3. 3 (b)に見られるような非常に強い渦度の集中が現われ、過大な誘起速度が生じるためと考えられる。CASE1では乱流拡散効果をうまく取り入れることにより、高Reynolds数域においても過度な渦度の集中は起こらず、規則正しい渦放出が再現されている。

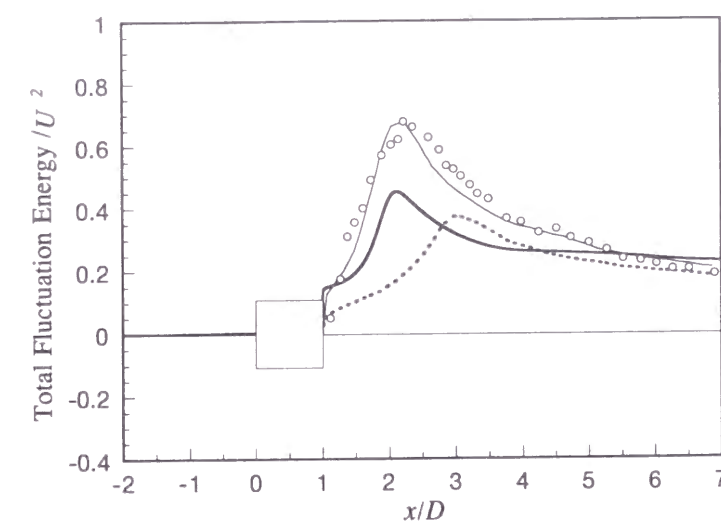
表3. 2 空気力係数の比較

	$C_D$	$C_{D'}$	$C_L'$	$St$
Franke & Rodi (RSE+w.f.) <sup>9)</sup>	2.15	0.383	2.11	0.136
Kato & Launder (M.P. $k-\epsilon$ +w.f.) <sup>10)</sup>	$2.05 \pm 0.03$		1.16	0.145
Present cal. (200 × 200)	2.05	0.093	1.43	0.141
Sakamoto et al. (Experiment) <sup>22)</sup>	2.22	0.132	1.45	0.134

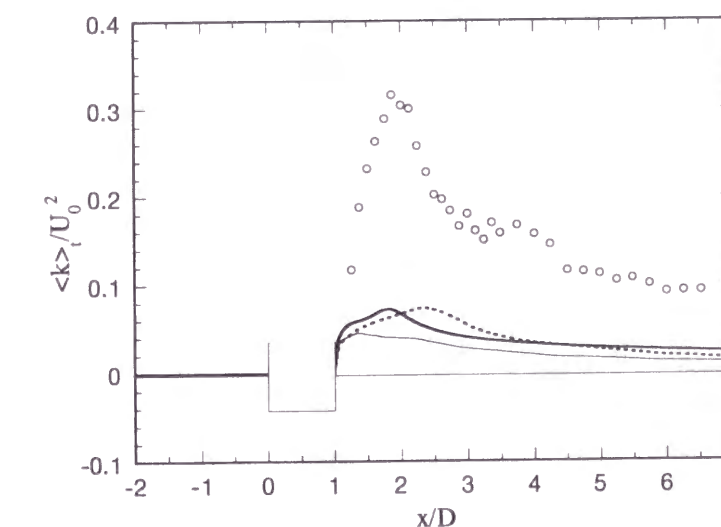
表3. 2には本解析による空気力係数の結果を既往の主なRANSモデルの結果と実験結果<sup>22)</sup>とともに示す。平均抗力係数についてはいずれのRANSモデルの結果も実験値に比べるとやや小さいが概ね一致している。揚力の変動値に大きな差が見られる。変動揚力係数の大きさはFranke & Rodi>本解析>Kato & Launderの順である。この違いを考察するために、図3. 4には平均流速およびトータルの変動エネルギー(periodic成分+stochastic成分)の中心軸上の分布を示す。角柱下流側の死水領域(図3. 4 (a)において $U/U_\infty < 0$ の領域を指す)の大きさはFranke & Rodiの結果や本解析結果では実験値に比較してかなり小さめに、反対にKato & Launderの結果では大きめに評価されている。これは角柱背後における乱流混合の大きさのちがいに起因するものであり、このことは図3. 4 (b)に示すトータルの変動エネルギーからわかる。トータルの変動エネルギーが最も大きい値をとるFranke & Rodiの解析は、最も大きな揚力の変動値を与え、反対に最も小さな値をとるKato & Launderの解析は最も小さい変動揚力を示す。すなわち、変動揚力と角柱背後の乱流混合および死水領域の大きさは密接に関係していることが示されている。これは固体壁近傍の取扱いや移流項の取扱いの違いによるものと考えられる。Kato et al.<sup>10)</sup>は固体壁近傍の取扱いが、乱流統計量だけではなく空力特性にも影響を与えることを示している。



(a) U成分



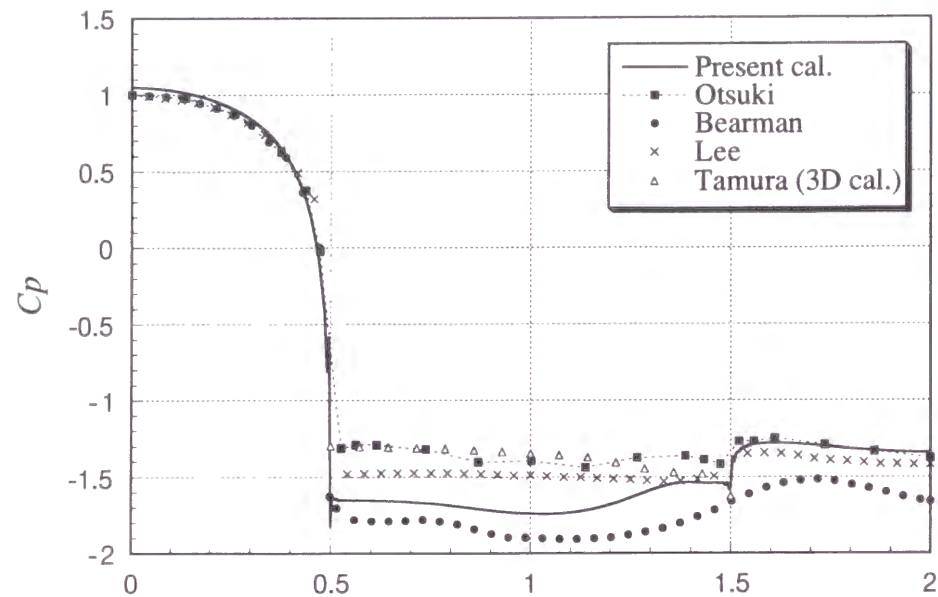
(b) トータルの変動エネルギー



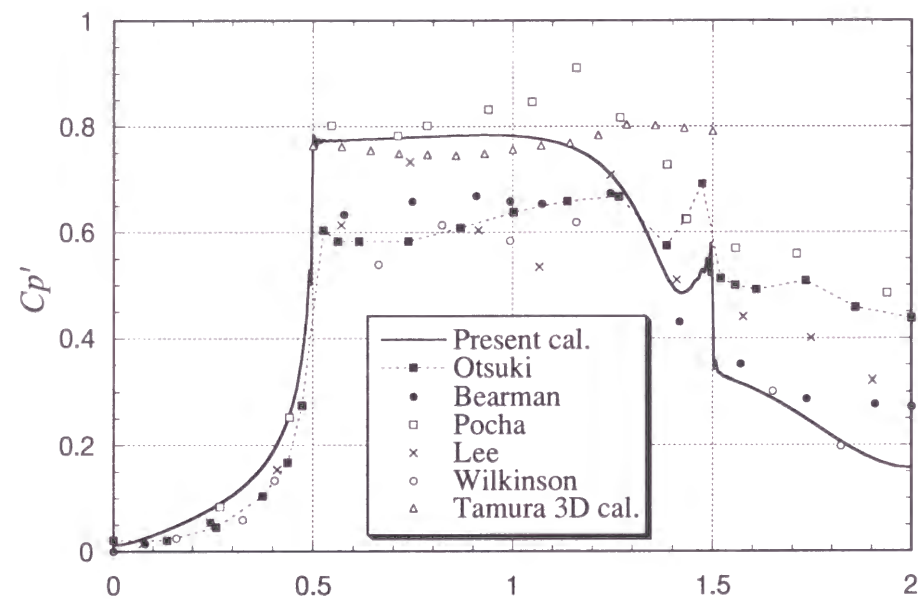
(c) 乱流エネルギー

図3. 4  $B/D=1.0$  矩形断面柱の時間平均乱流統計量の中心軸上の分布(200 × 200)





(a) 平均風圧係数

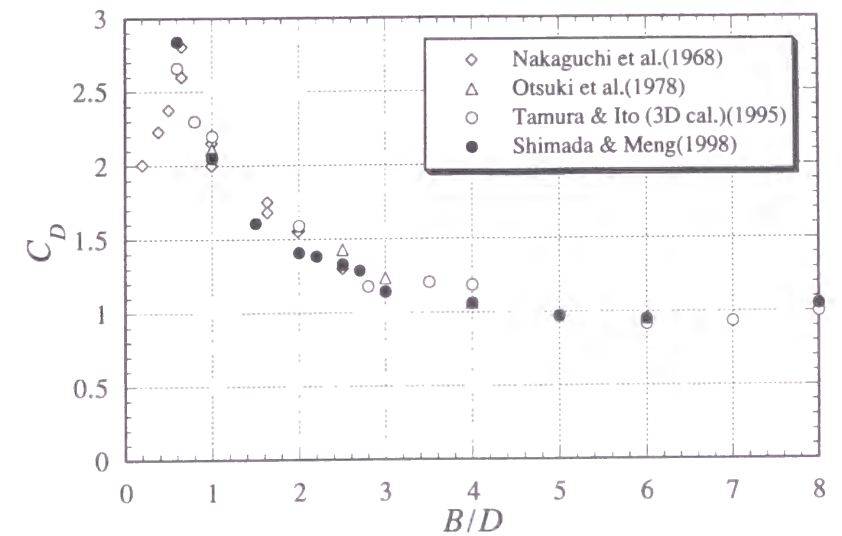


(b) 変動風圧係数

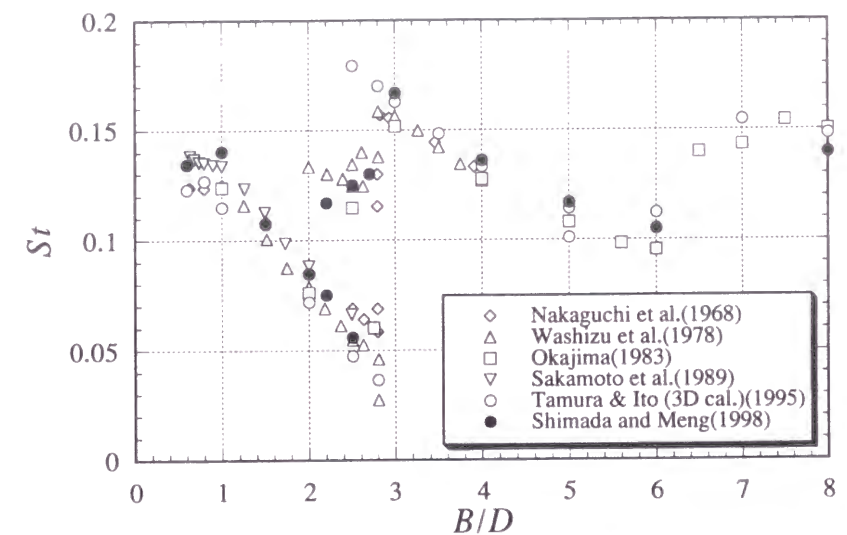
図 3. 5  $B/D=1.0$  矩形断面柱の圧力分布

図 3. 5 には平均風圧係数および変動風圧係数の分布を示す。  $B/D=1.0$  の断面は完全剥離型であるため、側面は剥離領域の中にあり、前縁からの剥離せん断層は側面上で再付着は示さない。したがって側面上で圧力の時間平均値はほぼ一定の値をとる。実験結果<sup>20, 26 ~ 29)</sup>は平均値および変動値ともにばらつきが見られるが、本解析結果は実験結果に概ね対応している。

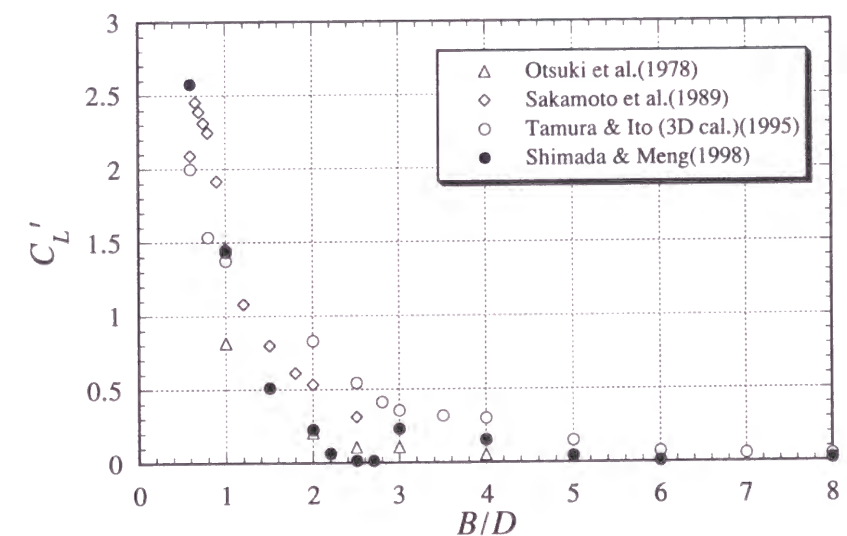
このように、本解析に用いられている修正型  $k-\epsilon$  モデルは流れ場の平均値および乱流統計量を十分に再現してはいないが、空力特性については満足できる結果が得られている。



(a) 平均抗力係数



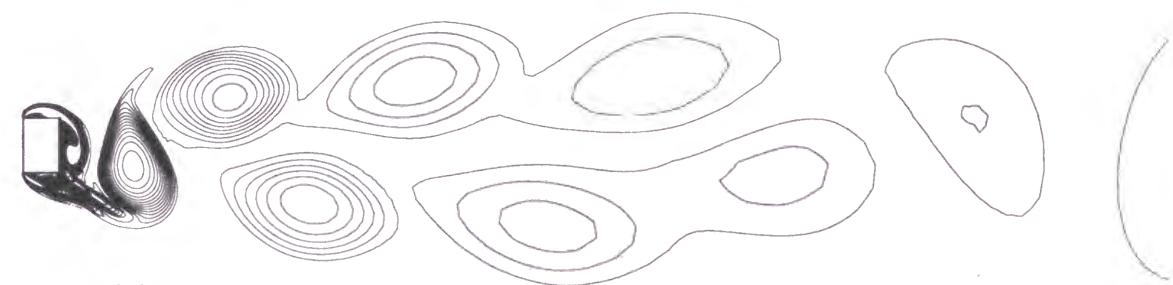
(b) Strouhal 数



(c) 変動揚力係数

図 3. 6 平均抗力係数、Strouhal 数および変動揚力係数の辺長比による変化

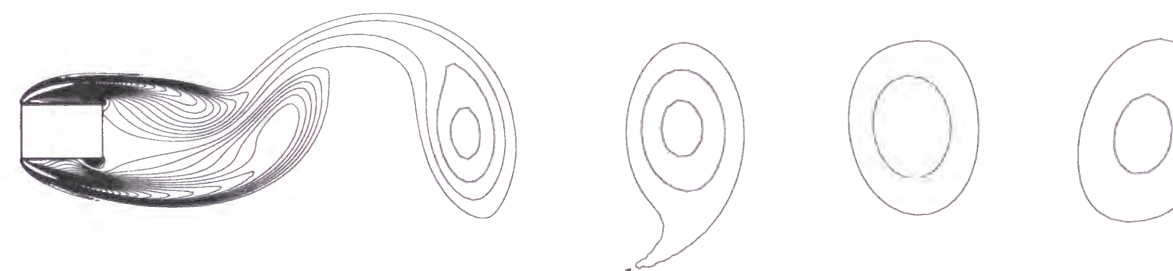




(a)  $B/D=0.6$



(b)  $B/D=1.0$



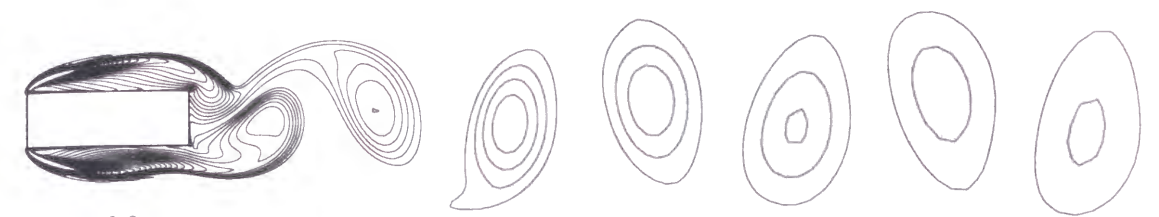
(c)  $B/D=1.5$



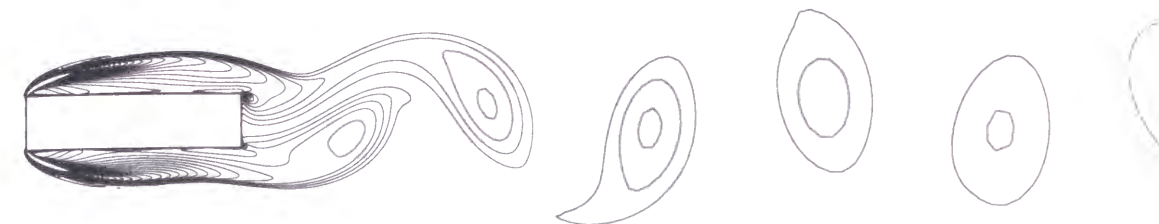
(d)  $B/D=2.0$



(e)  $B/D=2.5$



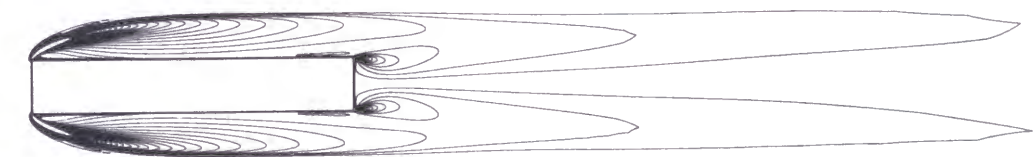
(f)  $B/D=3.0$



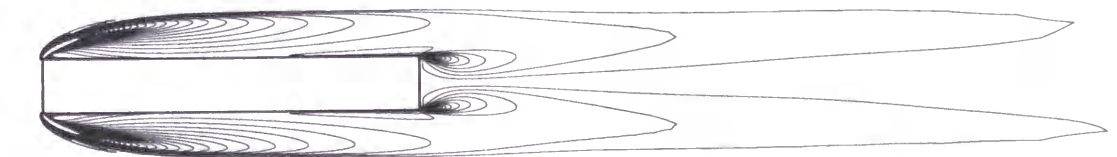
(g)  $B/D=4.0$



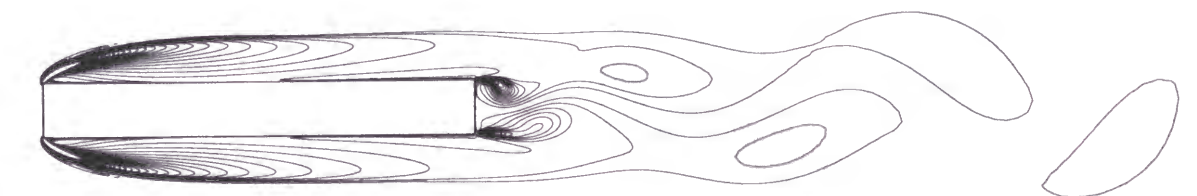
(h)  $B/D=5.0$



(i)  $B/D=6.0$



(j)  $B/D=7.0$



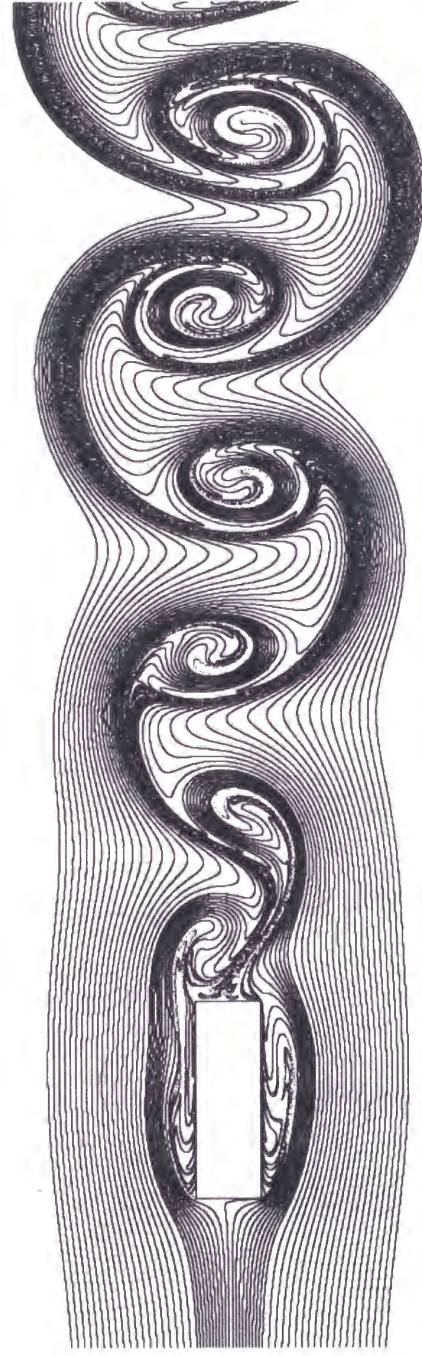
(k)  $B/D=8.0$

図 3. 7 種々の辺長比の矩形断面柱まわりの渦度場（最大揚力時）

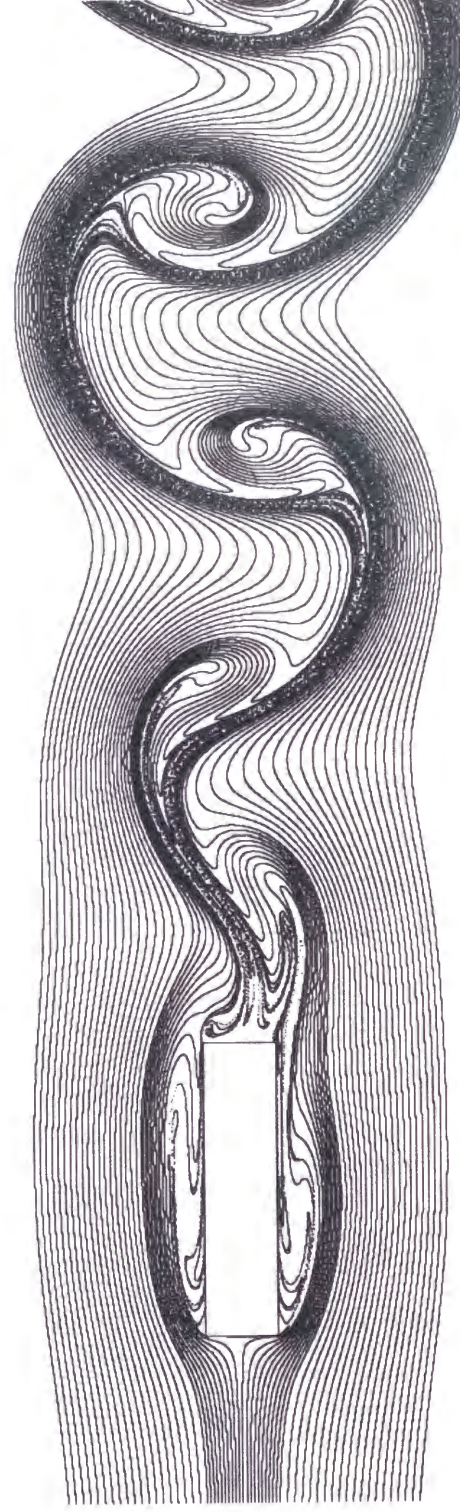




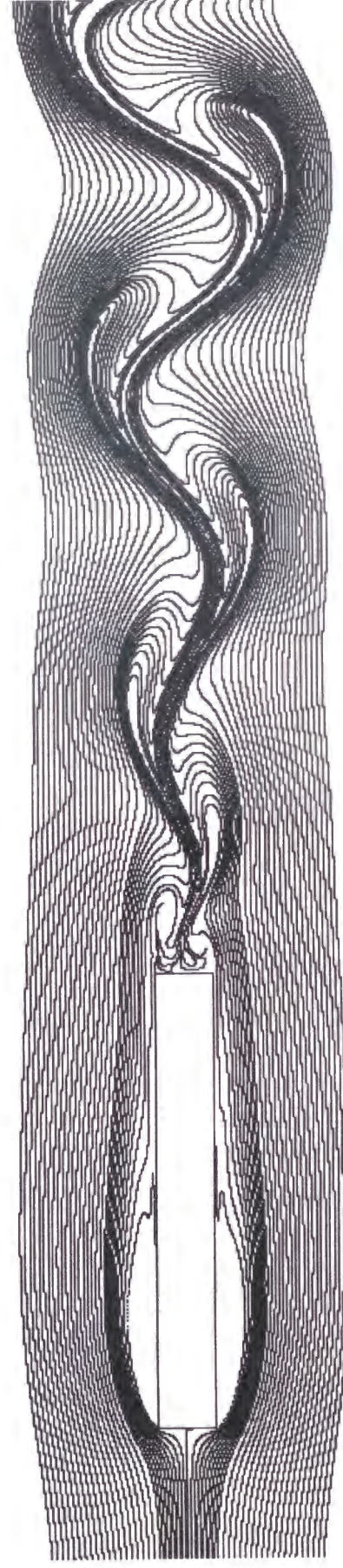
(a)  $B/D=2.0$



(b)  $B/D=3.0$



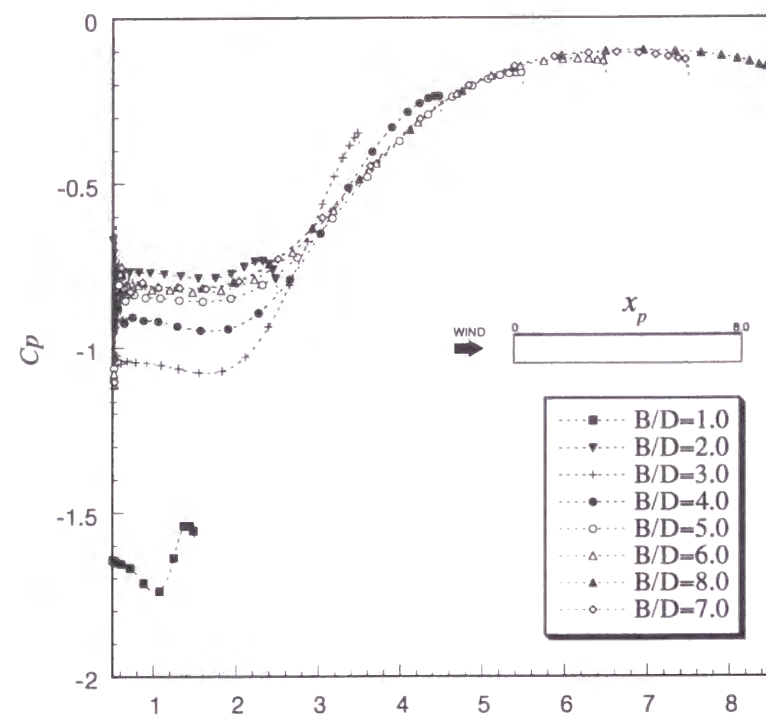
(c)  $B/D=4.0$



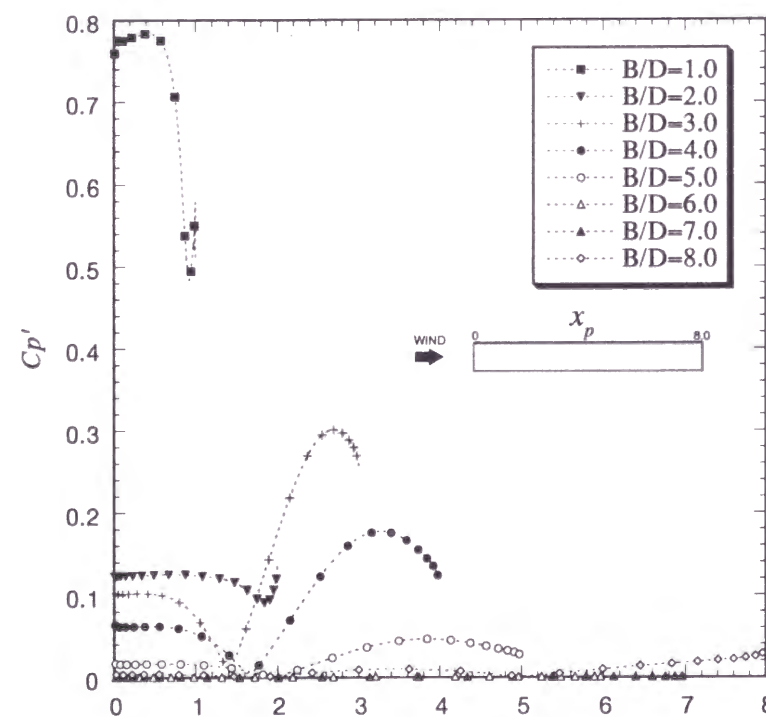
(d)  $B/D=8.0$

図 3. 8 本解析による流脈





(a) 平均風圧係数



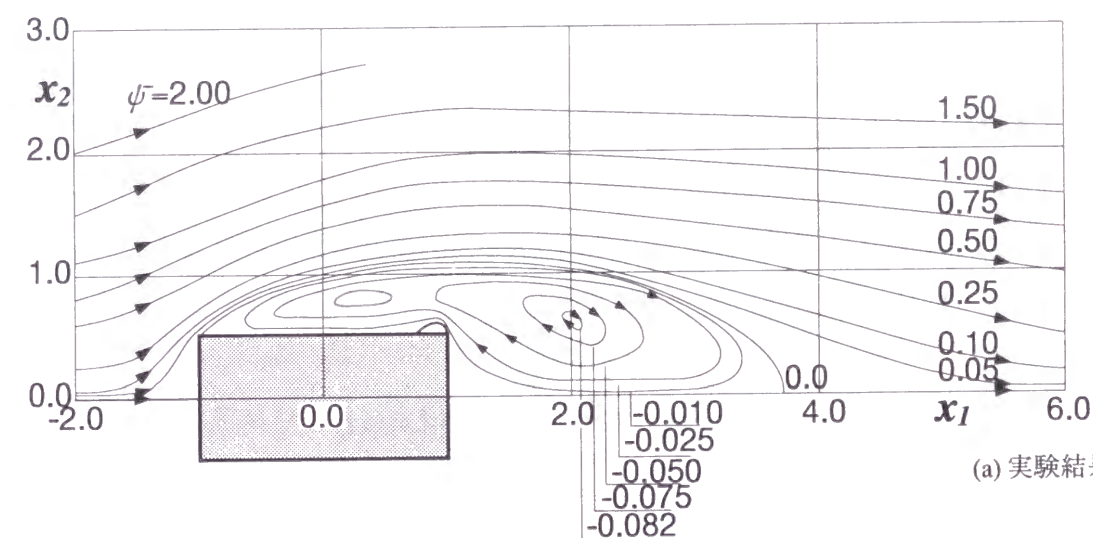
(b) 変動風圧係数

図 3. 9 側面上の平均風圧係数および変動風圧係数の分布の辺長比による変化

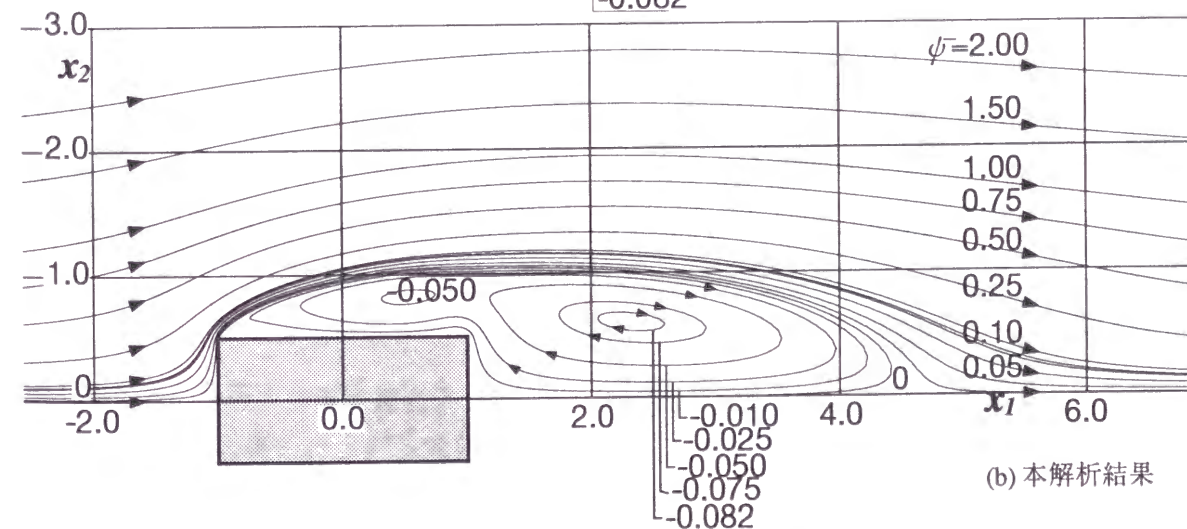
### 3. 3. 2 辺長比による空力特性の変化

図 3. 6 には平均抗力係数, 変動揚力のスペクトルから求められた Strouhal 数( $St=nD/U_{\infty}$ ,  $n$ : 変動揚力スペクトルの卓越振動数)および変動揚力係数 (periodic 成分によるもののみ) の辺長比による変化を示す. 同図には比較のために風洞実験結果<sup>1,15,20,21,22,30)</sup>および3次元解析による結果<sup>2)</sup>を示す. 既往の実験および解析結果の傾向は以下のようなものである. 平均抗力係数は  $B/D=0.6$  付近でピークを示し, それより大きい辺長比では単調に減少する傾向を示す. Strouhal 数は  $B/D=2.8$  および  $B/D=6.0$  付近で不連続性を示す. 変動揚力係数については辺長比の変化に関する資料が十分ではないが,  $B/D \geq 0.6$  では単調に減少する. 本解析結果は, 平均抗力係数および Strouhal 数に関しては実験値および3次元解析<sup>2)</sup>の結果とよく一致している. 変動揚力係数に関しては実験値および3次元解析<sup>2)</sup>の結果より小さな値を示す. この点については3. 3. 3 節において詳しく述べる.

以上に示した空力特性を流れ場と関連づけて考察するために, 図 3. 7 には本解析により得



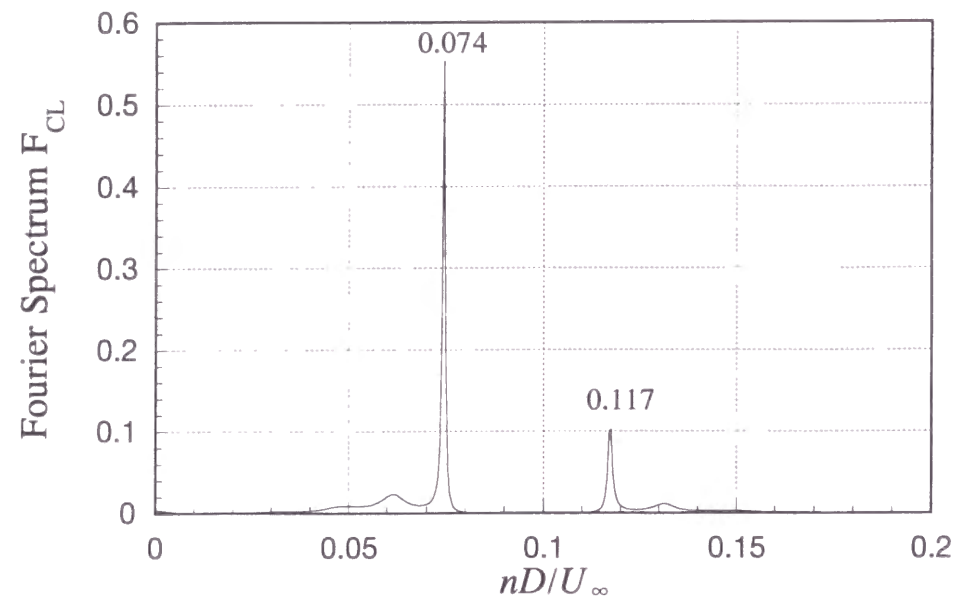
(a) 実験結果<sup>23)</sup>



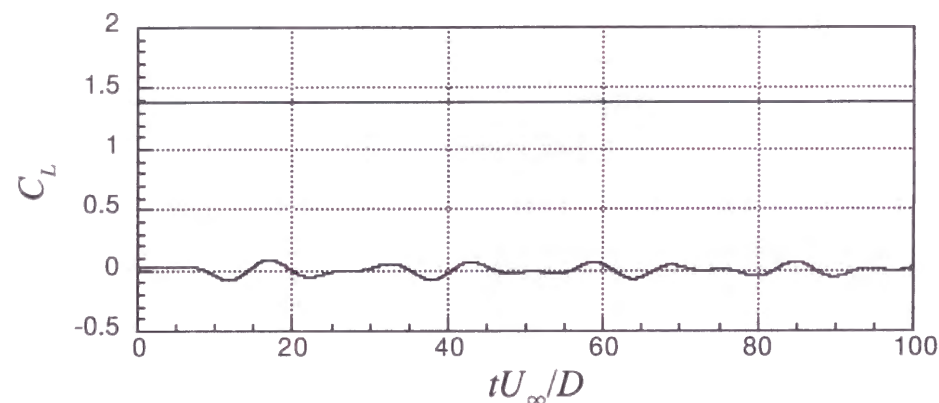
(b) 本解析結果

図 3. 10  $B/D=2$  の時間平均流線の比較





(a) 変動揚力係数の Fourier スペクトル



(b) 抗力および揚力係数の時系列波形

図 3. 11  $B/D=2.2$  の変動揚力係数の Fourier スペクトルと変動空気力の時系列波形

られた主な断面周りの瞬間渦度場を示す。一般に、3次元非定常解析の場合には、側面上の3次元変動に起因する微細な渦構造が見られる。それに対してRANSモデルを用いた本解析結果はこのような微細な渦は見られない。これはアンサンブル平均からのずれとしての微細な渦変動は乱流として取扱われ、その効果は渦粘性として取り込まれ、結果的に小さな渦は陽的には表われてこないためである。

再付着等の側面上での流れの様子を見る場合、渦度よりも流脈が適している。図3.8には特徴的な辺長比、すなわち渦放出周期が最も長くなる  $B/D=2.0$ 、Strouhal 数が極大値を示す  $B/D=3.0$  および定常的再付着となる  $B/D=8.0$  の断面の流脈を示す。また、図3.9には平均および変動風圧係数の側面上の分布の辺長比による変化を示す。

### 3. 3. 3 完全剥離型断面について ( $B/D < 2.8$ )

完全剥離型の断面ではいずれも極めて規則正しくかつはっきりした後流渦放出が見られる(図3.7(a~e))。平均風圧係数分布(図3.9(a))をみると、 $B/D=1.0$  および  $2.0$  では側面上で圧力の回復は見られず、時間平均的には完全剥離であることに対応している。また、側面全体が剥離領域の中に含まれるため変動風圧係数は側面全体にわたって大きい。

$B/D=0.6$  では角柱背後に渦が最も接近しており(図3.7(a))、平均抗力係数が最も大きいことに対応している。また後流渦列が2列になっているのが特徴的である。

$B/D=2.0$  までは角柱背後への渦の巻き込み位置は辺長比が大きくなるにしたがい角柱から遠ざかり、同時に Strouhal 数も小さくなる傾向がある。 $B/D=2.0$  では他の断面に比べ剥離せん断層の角柱背後への巻き込みが特に弱くなる。また、放出された渦の間隔は他の断面に比較して大きく、Strouhal 数が小さい(渦の放出周期が長い)ことに対応している(図3.8(a))。図3.10には  $B/D=2.0$  の時間平均流線について溝田・岡島(1981)<sup>23)</sup>による流れ場の詳細な計測によって得られた結果と本解析結果の比較を示す。溝田らは  $B/D=2.0$  では逆流域は大きく、下流にまで及んでいることを示している。本解析結果は計測結果に比較して後流域の大きさは大きめであるが、逆流域は下流にまで及ぶという定性的傾向は計測結果と一致している。

辺長比が2.0から2.8の間の断面は Reynolds 数が  $10^4$  の近傍では、側面の後縁部付近で剥離せん断層の非定常な再付着を伴ない、2つの渦放出モードが存在することが調べられている(15,24)。この流れが再付着するかしないかの微妙な領域での本解析手法の特性を調べるために、この領域において  $B/D=2.2$ 、2.5 および 2.7 の断面について解析を行なった。図3.11(a)には  $B/D=2.2$  の解析により得られた変動揚力係数のスペクトルを示すが、 $nD/U_∞=0.074$  と  $0.117$  に2つのピークが見られる。この内、無次元振動数が高い方( $nD/U_∞=0.117$ )は、Strouhal 数の分布図において  $B/D=2.0$  ( $St=0.085$ ) より辺長比が小さい側と  $B/D=3.0$  ( $St=0.165$ ) より辺長比が大きい側のほぼ中間に存在しており、実験結果と対応している。2つの渦放出モードは  $B/D=2.5$  でも見られるが、 $B/D=2.7$  では振動数が低い方のモードは見られなくなった。岡島ら<sup>24)</sup>はこの辺長比領域についても後流を熱線風速計により詳細に調べた。その結果、 $B/D=2.5$  の断面では2つのピークが同程度であるが、 $B/D=2.8$  では振動数が高い方のモードが支配的としている。本解析結果の傾向は岡島らの実験結果と対応している。

これら2つのモードの周期特性は後流の計測による実験からは間欠的に観察される。すなわち、ある時間領域では振動数が低い方のモードが卓越し、またある時間領域では振動数が高い方のモードが卓越する。図3.11(b)に示す本解析で得られた時間変動波形ではこれらの間欠性は見られず、両モードが重畳されたかたちで表われている。これはアンサンブル平均の効果により統計的に等価なかたちで表われたものと見ることができる。



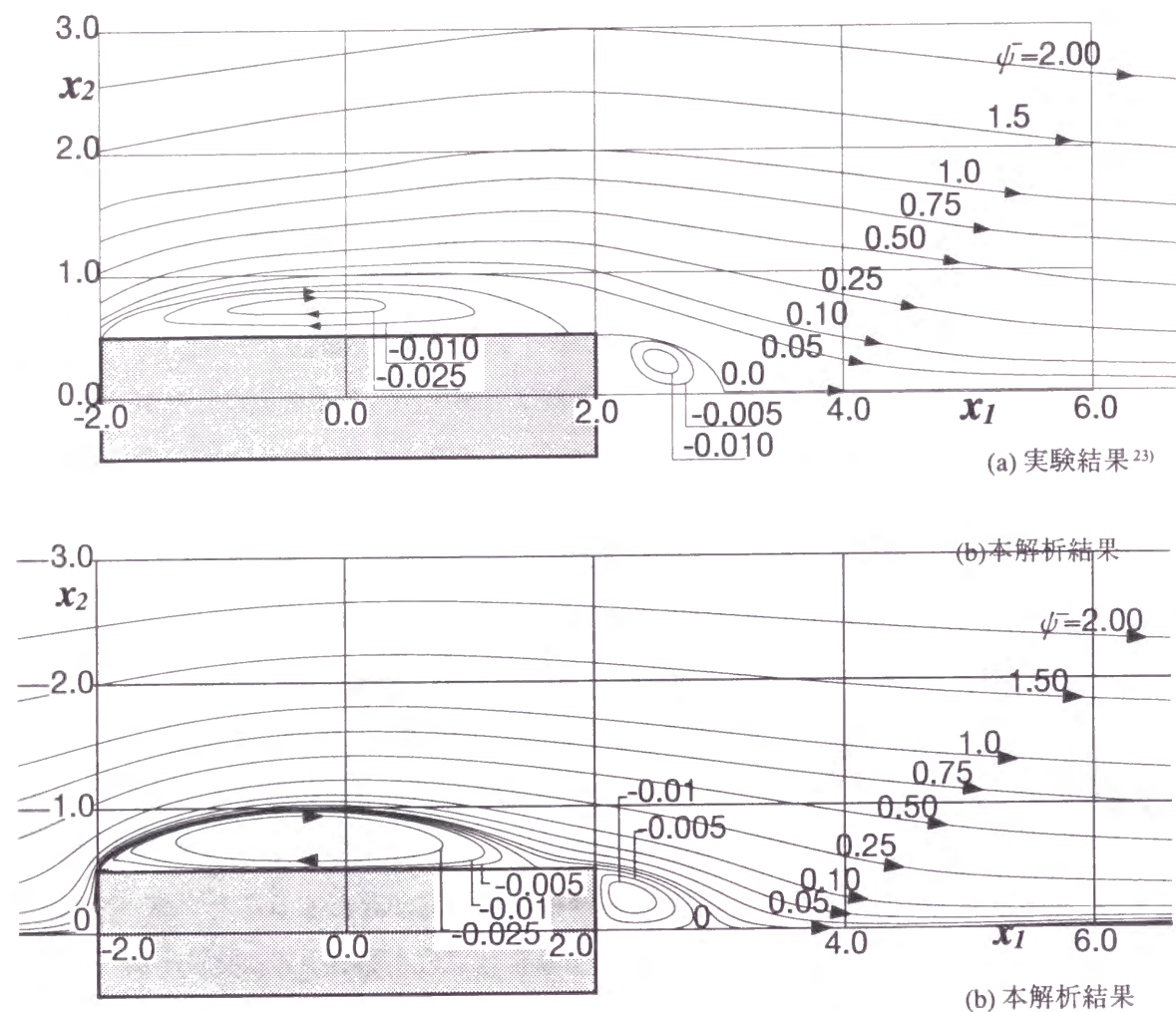


図3.12  $B/D=4$  の時間平均流線の比較

### 3.3.4 再付着型断面について( $2.8 < B/D \leq 8.0$ )

$B/D=3.0$  の断面に関しては、既往の実験値では Strouhal 数が  $0.16 \sim 0.17$  の極大値を示し、渦放出周期が突然短くなるが、この様子は本解析でも良好に再現されている。本解析では Strouhal 数が  $0.167$  まで急激に大きくなることに伴い、渦放出間隔は急激に狭くなり、非常に明瞭な渦放出が再び見られるようになる。このとき変動揚力係数も回復を示す(図3.6(c))。  $B/D=3.0$  の流脈(図3.8(b))からは、側面で剥離バブルが形成されていることが認められる。これに伴い平均風圧係数は前縁側で低く(図3.9(a))、後縁側で急速な回復が認められる。また、剥離バブルは上側面と下側面に周期的に形成されている。このような傾向は  $B/D=5.0$  までの辺長比で見られる。図3.12にはこのような周期的再付着断面の例として、 $B/D=4.0$  の断面について、解析によって得られた時間平均流線と溝田らの計測結果の比較を示す。本解析結果は側面上のはく離バブルや後流の逆流域の大きさなどに関して計測結果とよく一致している。

図3.6(b)の Strouhal 数の変化を見ると辺長比  $B/D=6.0$  付近にも極値が存在することがわかる。ところで、本解析によって得られた辺長比  $B/D=6.0$  の渦度コンター(図3.7(i))を見ると物体から遠く離れた後流で弱い揺動は認められるものの、断面近傍の流れ場はほとんど対称であり、他の断面に比較して後流渦放出は明らかに弱い。この前後の辺長比の  $B/D=5.0$  および  $B/D=8.0$  ではそれぞれ明確な渦放出が認められる。このような扁平断面については詳細な空気力の資料は現在のところ極めて乏しいが、 $B/D=6.0$  に関しては3次元非定常解析<sup>2)</sup>によって変動揚力の性状が調べられている。これによると、変動揚力のスペクトルには渦放出に伴う明確なピークが見られない。本解析によって得られた結果に渦放出が見られず、渦度場が対称に近いのは3次元非定常解析結果にも示されているように渦放出が微弱なためである。本解析は2次元解析にも関わらず、この周期的再付着から定常的再付着への移行段階において渦放出が抑制される領域があることを極めて明瞭に再現している。このような移行に伴う渦放出の抑制された辺長比領域は  $B/D=6.0 \sim 7.0$  にあることが流れのパターンから認められる。

$B/D=8.0$  では新たに後縁からの渦放出が見られるようになり(図3.7(k))、Strouhal 数は再び大きくなる。流脈(図3.8(c))からは両側面上の前縁側に明確な剥離バブルが定在して形成され、前縁から剥離した流れが両側面に定常的に再付着していることが認められる。

本解析により得られた  $3.0 \leq B/D \leq 8.0$  の再付着型断面の平均風圧係数(図3.9(a))は、負のピークを生じる位置および圧力が回復する位置に関してほぼ同様な傾向を示す。とりわけ  $5.0 \leq B/D \leq 8.0$  では側面全体にわたりほぼ同じひとつの分布形で表わされる。この傾向は3次元解析<sup>2)</sup>で得られた傾向ともよく対応している。変動風圧係数は、再付着型断面では前縁側と後縁側でそれぞれ変動が大きくなる部分が認められる。これらを平均風圧係数の分布と対応づけてみると、変動が大きい部分はそれぞれ前縁側の低圧部分と圧力が回復を示す後縁部分とに対応している。

### 3.3.5 変動風圧係数・変動揚力係数について

アンサンブル平均モデルでは、周期的な非定常性を伴う流れ場の物理量  $\phi$  に関してその瞬間値は以下のように表すことができる(Reynolds and Hussain 1972, Franke and Rodi 1991)。

$$\phi(t) = \bar{\phi} + \phi' = \bar{\phi} + \tilde{\phi} + \phi'' \quad (3.9)$$

ここに、 $\bar{\phi}$  は時間平均値、 $\phi'$  は時間平均値からのずれ、 $\tilde{\phi}$  は periodic 成分、 $\phi''$  は stochastic 成分である。RANS モデルではアンサンブル平均値は解析から直接的に求められるが、stochastic 成分はその分散として得られる。トータルの変動の分散は以下ようになる。

$$\sigma_{\phi}^2 = \sigma_{\tilde{\phi}}^2 + \sigma_{\phi''}^2 \quad (3.10)$$

$k-\varepsilon$  モデルの非定常解析では、periodic 成分の分散値は以下のように求められる。

$$\sigma_{u_i}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}_i^2(t) dt \quad (3.11)$$

stochastic成分はその分散値として評価され、乱流エネルギー $k$ と以下のように関係づけられて求められる。

$$\sigma_{u_i}^2 = \nu_i \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.12)$$

しかし圧力のstochastic成分に関してはRANSモデルではモデル化されていないため、そのトータルの変動はのみによる。

$$\sigma_{p, \text{RANS}}^2 = \sigma_p^2 < \sigma_{p, \text{exact}}^2 \quad (3.13)$$

したがってその値は真の値よりも常に小さめとなる。表面圧力の断面周りの積分量である揚力に関してもその変動値に関しては同様のことが言える。したがって変動風圧係数および変動揚力係数については本解析でもperiodic成分のみを用いてこれら进行评估している。

完全剥離型ではKarman渦放出に伴うはく離せん断層の揺動によるperiodic成分が支配的である。したがって3.1節に示されたようにperiodic成分のみを考慮した本解析結果でも、変動成分中ですべての成分进行评估した実験値および3次元解析結果にはほぼ一致する。

一方、再付着型断面で、辺長比が大きく、定常的再付着が起こるようになると変動成分中に占めるstochastic成分の割合が大きくなる。したがって再付着型断面では、stochastic成分进行评估できない本解析の結果と実験および3次元解析結果とは定性的傾向は一致するものの、定量的にはその差は顕著となる。

1.5 < B/D < 3.0では3.2.1で述べたようにKarman渦の形成が角柱から遠ざかる。したがって渦放出に伴うはく離せん断層の揺動が弱まり、変動成分中のperiodic成分は小さくなると同時にその割合も小さくなるものと考えられ、実験値に比べ小さめな値を示すものと考えられる。この点について、変動風圧係数および変動揚力係数に関して現在までのところ、これらに関するデータはperiodic成分とstochastic成分に分けて示された例がないため解析結果の妥当性を判断することは難しい。RANSモデルの非定常性の再現性について、特にこのような間欠性を伴う現象の再現性についての解釈は検討の余地がある。

### 3. 4 結論

辺長比0.6 ≤ B/D ≤ 8.0の断面を有する2次元矩形断面柱について修正型k-εモデルによる2次元流体解析を行い、その空力特性評価における適用性について検討を行なった。その結果、以下のような知見を得た。

(1) 修正型k-εモデルによる2次元解析では、高Reynolds数の乱流場においても渦度の過大な集中が起こらず、極めて滑らかでかつ規則正しい渦放出が得られた。

(2) 平均抗力係数およびStrouhal数に関しては、すべての辺長比に対して実験値と良好な一致がみられた。特にStrouhal数に関してはB/D=3.0および6.0の断面において不連続性が明瞭に再現された。また、辺長比2.0 < B/D < 3.0の周期的再付着断面では2つの渦放出モードをもつ現象が再現された。

(3) 変動揚力係数については、定性的には実験値および3次元解析結果の傾向をよく捕らえられているが、値そのものは小さめである。これは本解析では変動揚力係数の内、periodic成分のみ进行评估したためである。

(4) 平均風圧係数の分布に関して、特に再付着型断面では、前縁付近の剥離バブルによる低圧部や後縁付近での再付着に伴う圧力回復を再現し、3次元解析の結果とも良い対応を示した。

本報告では静止状態における空力特性のみ示したが、本モデルの空力弾性問題への適用を考えると、動的な空力特性の再現が最も重要である。一般に矩形断面の空力弾性振動は渦放出と密着した関係にある。本モデルは矩形断面の渦放出に関する内在的な不安定性をよく再現したことで、振動問題への適用の可能性が期待される<sup>25)</sup>。



## 参考文献

- 1) 中口博, 橋本貴久裕, 武藤真理: 矩形断面の抗力に関する一実験, 航空学会誌, 第16巻, 第168号, p1-5, 1968.1
- 2) 田村哲郎, 伊藤嘉晃: 角柱まわりの流れと空力特性の辺長比による変化, 日本建築学会構造系論文集, 第486号, p.153-162, 1996.8
- 3) Kawamura, T. and Kuwahara, K. : Computation of high Reynolds number flow around circular cylinder with surface roughness, *AIAA paper* 84-0340, 1984
- 4) Murakami, S. and Mochida, A. : On turbulent vortex shedding flow past 2D square cylinder predicted by CFD, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 54/55, p.191-211, 1995
- 5) 持田灯, 村上周三, 富永禎秀, 小林光: Smagorinsky SGSモデルにおける標準型とDynamic型の比較 Dynamic LESによる2次元角柱まわりの乱流渦放出流れの解析(第1報), 日本建築学会計画系論文集, 第479号, p.41-47, 1996.1
- 6) 野澤剛二郎, 田村哲郎: 角柱まわりの複雑乱流場に対するLESの適用法の提案とその課題, 土木学会論文集, No.591/I-43, p.151-161, 1998.4
- 7) Ohya, Y., Nakamura, Y., Ozono, S., Tsuruta, H and Nakayama, R. : A numerical study of vortex shedding from flat plates with square leading and trailing edges, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 236, p.445-460, 1992
- 8) 野津剛, 田村哲郎: 高精度・保存的流体計算法の耐風問題への適用性について, 日本建築学会構造系論文集, 第494号, p.43-49, 1997.4
- 9) Franke, R. and Rodi, W. : Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models, *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, 20-1, Technical University of Munich, 1991.9
- 10) Kato, M. and Launder, B. E. : The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders, *Ninth symposium on "Turbulent shear flows"*, Kyoto Japan, 1993.8
- 11) 加藤真志: 修正生産項  $k-\epsilon$  モデルを用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析, 土木学会論文集, No.577, I-41, p.217-230, 1997.10
- 12) Deng, G. B., Piquet, J. and Visonneau, M. : 2-D computations of unsteady flow past a square cylinder with the Baldwin-Lomax model, *Journal of Fluids and Structures*, pp663-680, 1994.8
- 13) 河島紀英, 河村洋:  $k-\epsilon$  モデルによる正方形角柱まわり流れの数値計算, 第7回計算流体シンポジウム講演論文集, 1996.7
- 14) 岡島厚, 坂井晴久: 直接法と  $k-\epsilon$  モデルによる矩形柱まわりの流れの数値シミュレー

ション, 日本風工学会誌, 第47号, p.79-80, 1991.4

- 15) 岡島厚: 種々な断面辺長比の矩形柱周りの流れ, 日本風工学会誌, 第17号, p.1-19, 1983.9
- 16) Norris, L.H. and Reynolds, W.C., Rept. No. FM-10, Stanford Univ., Dept. Mech. Eng., 1975
- 17) Rodi, W. : Experience with tow-layer models combining the  $k-\epsilon$  model with a one-equation model near the wall, *AIAA-91-0216*, 1991
- 18) 嶋田健司, 孟 岩: 一様流中の円柱に関する  $k-\epsilon$  モデルによる二次元数値解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, 20164, 1997.9
- 19) Lyn, D. A., Proc. 23rd Cong. Int. Ass. Hydraulic Research, Ottawa, Canada, A85-A92, 1989.8
- 20) 大築志夫, 藤井邦雄, 鷺津久一郎, 大屋昭男: 一様流中におかれた二次元静止矩形柱の空力3分力特性と圧力分布について, 構造物の耐風性に関するシンポジウム論文集, pp.169-176, 1978
- 21) 大屋昭男, 鷺津久一郎, 藤井邦雄, 大築志夫: 一様流中におかれた二次元静止矩形柱の空力三分力特性と圧力分布について(続報), 第6回風工学シンポジウム論文集, pp.153-159, 1980
- 22) 坂本弘志, 羽二生博之, 小林圭史: 一様流中にある長方形断面柱に作用する変動流体力(完全はく離形角柱について), 機械学会論文集 B, 55巻516号, p.2310-2317, 1989.8
- 23) 溝田武人, 岡島厚: 角柱まわりの時間平均流れに関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第312号, p.39-47, 1981.8
- 24) 岡島厚, 上野久儀, 易東来, 中村透: 断面比2~3の矩形柱周りの流れにおけるレイノルズ数の影響, 第13回風工学シンポジウム論文集, p.113-118, 1994.12
- 25) 嶋田健司, 孟 岩:  $k-\epsilon$  モデルによる  $B/D=2$  矩形断面柱の空力弾性振動の数値解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, 1998.9
- 26) Bearman, P. W. and Obasaju E. D. : An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.119, pp297-321, 1982
- 27) Lee, B.E. : Some observation of the effect of aspect ratio on the influence of turbulence on the drag of rectangular cylinders, *The international colloquium on bluff body aerodynamics and its applications*, Kyoto, 1988.1
- 28) Pocha, J. J. : On unsteady flow past cylinders of square cross-section, Ph.D. thesis, Department of Aeronautics, Queen Mary College, London, 1971
- 29) Wilkinson, R. H. : On the vortex-induced loading on long bluff cylinders, Ph.D. thesis, Faculty of Engineering, University of Bristol, England, 1974
- 30) Washizu, K., Ohya, A., Otsuki, Y. and Fuji, K. : Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode, *Journal of Sound and Vibration*, 59(2), p.195-210, 1978

- 31) 嶋田健司, 孟 岩: 一様流中の矩形断面柱に関する  $k$ - $\varepsilon$  モデルによる二次元数値解析, 日本風工学会誌, 第 71 号, p.199-200, 1997
- 32) 嶋田健司, 孟 岩:  $k$ - $\varepsilon$  モデルによる矩形断面柱の空力特性評価, 第 11 回数値流体力学シンポジウム論文集, p.217-218, 1997
- 33) 嶋田健司, 孟 岩: 矩形断面柱の空力特性と  $B/D=2$  断面柱の空力振動の  $k$ - $\varepsilon$  モデルによる数値解析, 第 15 回風工学シンポジウム論文集, p.161-166, 1998.12
- 34) 嶋田健司, 孟 岩: 種々の辺長比を有する矩形断面柱の空力特性評価に関する修正型  $k$ - $\varepsilon$  モデルの適用性の検討, 日本建築学会構造系論文集, 第 514 号, p.73-80, 1998.12
- 35) Shimada, K., Ishihara, T., : Prediction of aeroelastic vibration of rectangular cylinders by  $k$ - $\varepsilon$  model, *Journal of Aerospace Engineering*, 12(4), p.122-135, 1999

## 第4章 2次元疑似 direct simulation による $B/D=2.0$ の自己励起型渦励振の解析

### 4.1 概要

建築・土木における構造物の設計においては構造物の長大化に伴う風による振動の評価の重要性の認識が高まっている。建築・土木における構造物断面は一般に bluff な形状でこれらに作用する空気力は剥離による非常に複雑な流れに伴ったものである。空力不安定振動のうち渦励振は比較的低い無次元風速域で発生することから、その評価については橋梁等ではその頻度の多さから疲労の問題の観点から重要である。また、建築物では超高層化に伴う長周期化により設計風速内に発現の可能性がある場合があり、構造体を決定する上で重要になる。

断面辺長比  $B/D$  ( $B$ : 奥行き,  $D$ : 見つけ幅) が2より小さい矩形断面柱の渦励振では周知のように Karman Vortex の影響が支配的である。一方、断面辺長比がおよそ2より大きい扁平角柱の空力弾性挙動では、振動に伴ない断面の前縁から剥離する剥離せん断層の挙動が重要となる。この剥離せん断層は剥離泡（前縁剥離渦）を形成した後に断面側面上を流下する。この渦の流下に伴う圧力変動に基づく振動1サイクルあたりの仕事が正となり、空気力としては負減衰力となって系の構造減衰力を上回った場合に励振が発生する<sup>1)</sup>。この振動は Strouhal 数の逆数から求まる風速より低い風速で発現し、 $B/D < 2$  の場合のいわゆる Karman 渦型渦励振とは発生機構が異なることから、低風速励振、剥離渦励振または自己励起型渦励振<sup>2)</sup>と呼ばれており、空力的には非常に興味深い現象である<sup>1,2,3)</sup>。

Karman 渦型渦励振については lift-oscillator model<sup>4)</sup>あるいは wake-oscillator model<sup>5)</sup>に代表される数学モデルによる予測方法が有効であるが自己励起型渦励振については発現風速の予測は可能なものの<sup>2)</sup>振幅予測まで含めた予測方法は確立されていないのが現状である。ところで近年ではこのような大規模な剥離現象を伴う移動境界問題に対しても、流体運動の基礎方程式にもとづきこれを直接あるいは何らかのモデル化を施して解く数値解析的手法の適用が試みられ始めている。しかしこれらの多くは断面辺長比が小さい完全剥離型断面での Karman 渦型渦励振を対象としたものであり、比較的大きな断面辺長比を有する断面柱に関する例は多くはない。これまでに断面比  $B/D=2$  の並進および  $B/D=5$  のねじれについては差分法により強制加振状態で既往の非定常空気力の実験結果を非常によく再現し得ることが示されている<sup>6)</sup>。また  $B/D=5$  のねじれ振動については自由振動の計算も試みられている<sup>7)</sup>。

一般に大規模な剥離・再付着を伴う複雑な流れ場が関係する問題では三次元解析が望まれる。しかし空力弾性振動のような非定常移動境界問題では振動の定常状態を得るために非常に長い時間にわたる追跡が必要となり、そのため三次元解析では経済性において難点が伴う。ところで渦励振領域での振動物体まわりの圧力分布についての二次元性が示されているように<sup>8)</sup>、振動時においては表面圧力の軸方向相関が増加することが知られている。このことは第一



次近似として二次元解析の適用の可能性について示唆し得るものとも考えられる。そこで以下においては特に二次元の解析でどの程度まで現象が再現できるかをひとつの主眼とした上で、比較的实验による研究例の多い断面辺長比 $B/D=2$ についてその一様流中で流れと直角方向に並進一自由度弾性支持させた場合の結果を示し、差分法による数値計算の大規模な剥離を伴う移動境界問題への適用性を検討する。

## 4. 2 解析方法

解析は(4.1)式に示す二次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および(4.2)式に示す連続の式に基づいて行なう。

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

これらを一般曲線座標系により微分演算を計算空間上に変換した方程式系を差分法で解く。いま物理空間上の座標変数と計算空間上の座標変数を以下のように関係づける。

$$x = x(\xi, \eta, \tau) \quad (4.3)$$

$$y = y(\xi, \eta, \tau) \quad (4.4)$$

$$t = \tau \quad (4.5)$$

これらにより物理空間上の微分演算は計算空間上の微分演算により表わされる。以下の解析では物体の振動状態を考慮して流れ場を解析する必要がある。これは時間まで含めた一般曲線座標変換により考慮する。このとき一階微分について示せば次式のようにになる。

$$\partial_x = \xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta + \tau_x \partial_\tau = J^{-1} (y_\eta \partial_\xi - y_\xi \partial_\eta) \quad (4.6)$$

$$\partial_y = \xi_y \partial_\xi + \eta_y \partial_\eta + \tau_y \partial_\tau = J^{-1} (-x_\eta \partial_\xi + x_\xi \partial_\eta) \quad (4.7)$$

$$\partial_t = \xi_t \partial_\xi + \eta_t \partial_\eta + \tau_t \partial_\tau = \partial_\tau + J^{-1} \{ (x_\eta y_\tau - y_\eta x_\tau) \partial_\xi + (y_\xi x_\tau - x_\xi y_\tau) \partial_\eta \} \quad (4.8)$$

ここに $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ は変換の Jacobian である。したがってたとえば(4.1)式の $u$ 成分について示せば計算空間上において解くべき方程式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & \partial_\tau u + J^{-1} \{ -(v - y_\tau) x_\eta + (u - x_\tau) y_\eta \} u_\xi + J^{-1} \{ -(u - x_\tau) y_\xi + (v - y_\tau) x_\xi \} u_\eta \\ & = -(\xi_x p_\xi + \eta_x p_\eta) + Re^{-1} \tilde{\nabla}^2 u \end{aligned} \quad (4.9)$$

ただしここに、

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^2 = & J^{-2} (\alpha \partial_{\xi\xi} - 2\beta \partial_{\xi\eta} + \gamma \partial_{\eta\eta}) \\ & + J^{-3} (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) (-y_\eta \partial_\xi + y_\xi \partial_\eta) \\ & + J^{-3} (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) (x_\eta \partial_\xi - x_\xi \partial_\eta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\alpha = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad \beta = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad \gamma = \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad (4.11)$$

ここで計算空間上の方程式(4.9)式では移流項における移流速度は各格子点の移動速度との相対速度と見做されている。物理面空間上では計算格子は物体の移動とともに変形するが、一般曲線座標変換により計算空間上では固定された正方直交格子上で解析を行なう。実際の差分演算はこの計算空間上で行なう。

Bluff Body まわりの流れ場のように剥離・再付着を伴う複雑な流れ場の場合、物体に作用する流体力を精度よく評価するためには物体近傍流れの構造を十分に解像し剥離せん断層の挙動を可能なかぎり忠実にとらえる必要がある。ここでは境界適合格子を用い、物体近傍に格子点を集中させこれに対応する(図4.1)。計算格子系はO型格子で総格子点数は周方向200( $\xi$ 方向)×半径方向100( $\eta$ 方向)=20,000点である。解析領域は半径30Dの円形でその中心から風上側-5Dの位置に断面の中心を設定する。

圧力および流速各成分は同一格子点上に定義するレギュラーメッシュ系を採用する。解法はMAC法に準ずる。すなわち、(4.2)式に示す連続の式を次式に示す圧力に関する Poisson 方程式を解くことで考慮し、その結果を用いて運動量方程式を解く。

$$\nabla^2 p = -\text{div} \{ (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \} \mathbf{u} - \frac{\partial D}{\partial t}, \quad D = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.12)$$

移流項には(4.13)式に示される三次精度風上差分<sup>8)</sup>を用い高 Reynolds 数での数値的不安定性に対処する。

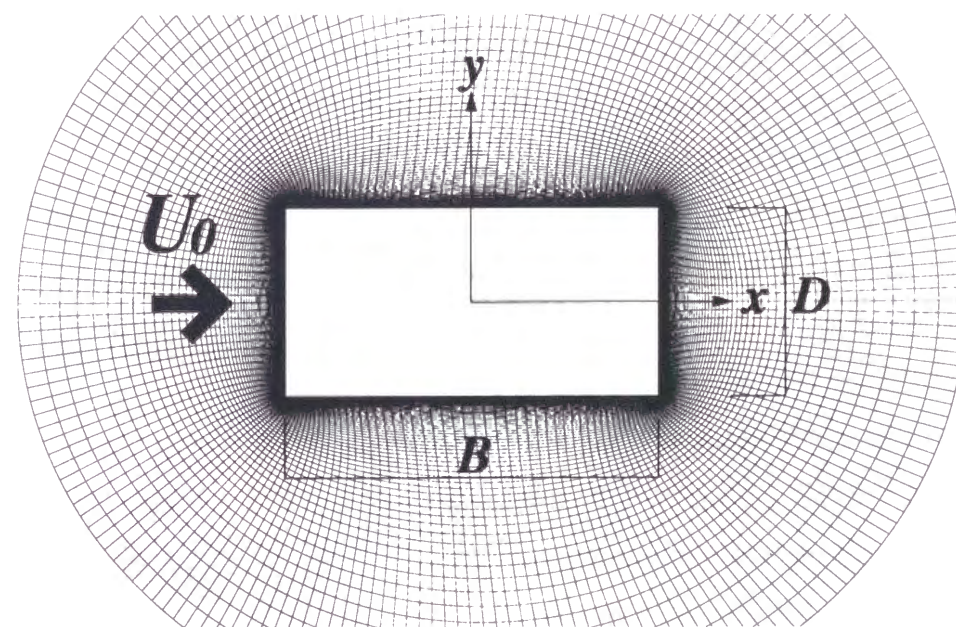


図4.1 解析格子(200×100)



$$c \frac{\partial u}{\partial x} \approx c \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} + |c| \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{4\Delta x} \quad (4.13)$$

その他の空間微分項は二次精度の中心差分で近似する。時間積分は一次精度の陰的Euler法を用いる。ただし移流項に関しては以下のように移流速度をひとつ前の時間ステップのものを用い線形化して扱う。

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \quad (4.14)$$

移動境界の場合の固体境界上の圧力の境界条件については運動量方程式より以下のように示される<sup>9)</sup>。

$$p_\eta = - \frac{(\nabla \xi \cdot \nabla \eta) p_\xi + u_\tau \cdot \nabla \eta}{|\nabla \eta|^2} \quad (4.15)$$

ここに右辺第1項目は境界に対する格子の直交性に関する項、第2項目は物体の運動(加速度)に伴う項である。格子が境界に対して厳密に直交しており静止または等速度運動の場合にのみ物体上で法線方向勾配が零のNeumann条件と一致する。遠方境界では $p=0$ のDirichlet条件を課す。流速については物体上はno-slip条件、流入境界では一様流入および流出境界では自由流出とする。振動の計算にはRunge-Kutta法を用いる。Reynolds数は既往の風洞実験が行なわれているオーダーにあわせて $Re=U_0 D/\nu=10^4$  ( $U_0$ : 流入風速,  $\nu$ : 流体の動粘性係数) とする。Scruton数は $Sc=2M\delta/(\rho_a B D)$  ( $M$ : 単位長さあたりの質量,  $\delta$ : 対数減衰率,  $\rho_a$ : 空気密度) で定義し $Sc=2.0$ とする。(諸元については既往の風洞実験<sup>2)</sup>を参考にし,  $B=0.3\text{m}$ ,  $D=0.15\text{m}$ ,  $M=0.4431\text{ kg s}^2\text{m}^{-2}$ ,  $\delta=0.01246$  とする。流入風速については $U_0=1\text{m/s}$  とする。) 無次元風速の代表長としては流れと直角方向の長さ $D$ をとり<sup>3)</sup>,  $Ur=U_0/(f_0 D)$  ( $f_0$ : 物体の固有振動数) で定義する。無次元風速は $Re$ 数を一定にするために物体の固有振動数を変えることで変化させる。流れ場および振動の解析の時間刻みは $\Delta t=0.0025$ とし、解析は無次元時間 $tU_0/D=500 \sim 1000$ まで行なう。流れおよび振動計算の初期条件はひとつ前の無次元風速の最終の値とする。

以上、解析手順についてまとめると、まず(4.12)式によって圧力を求め、得られた値を用い(4.9)式より流速成分を計算する。圧力によって形状抵抗を、流速成分によってせん断応力を求め物体に作用する外力とする。振動計算により新たな時点での物体の位置を求め、物体を移動するとともに格子生成を行なう。

流れ場の計算では時間刻みを大きくとるため陰解法を用いる。一方、後述するように応答は固有振動数で変動する正弦波状であり、無次元風速にも依存するが振動1周期間に流れ場の計算に対応した振動の計算ステップが1200~2800と十分なステップ数があるため振動の計算には陽解法であるRunge-Kutta法を用いる。なお同法を用いる際に必要となる外力の中間値は $t$ および $t+\Delta t$ における外力の線形補間によって求める。

## 4. 3 解析結果

### 4. 3. 1 断面まわりの流れ場

図4.2には振動時の断面まわりの流れ場の形成過程を示す。形成過程は大きく分けてi)前縁剥離渦の形成, ii)前縁剥離渦の流下, iii)後縁二次渦との一体化および放出から成る。図4.4には $Ur=5.0$ の場合の代表的な約1/2振動周期間の各瞬間の断面まわりの圧力分布を図4.5には同時刻での渦度分布を時間を追って示す。図中には渦の発達過程を番号で追って示している。前縁から形成された剥離せん断層aは剥離泡を形成し(a1~a6)、巻き込み(a7)、側面を流下する(a8~a9)。このとき静止時(図4.3)に対して側面上で強い渦の巻き込みが見られるのが特徴である(a7~a8)。一方渦aと同時に反対側の風下隅角部から後縁二次渦bが発達する(b1~b4)。この渦度は流下してきた前縁剥離渦aと同じ符号をもつため物体後方においてこれと一体化される(a10, b5)。このとき振動振幅はほぼ最大に達している。その後これ

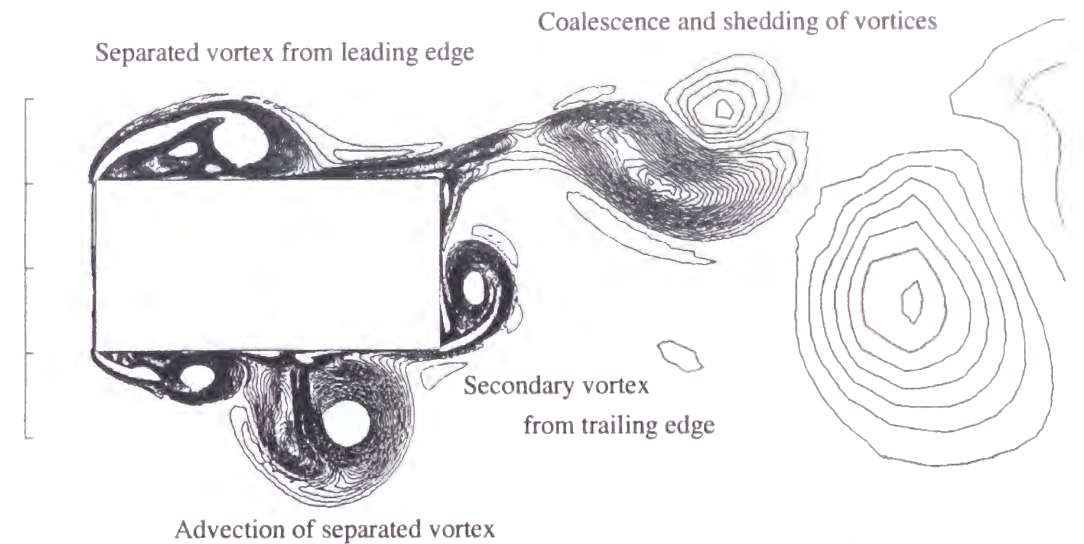


図4.2 自己励起型渦励振における断面まわりの瞬間渦度場

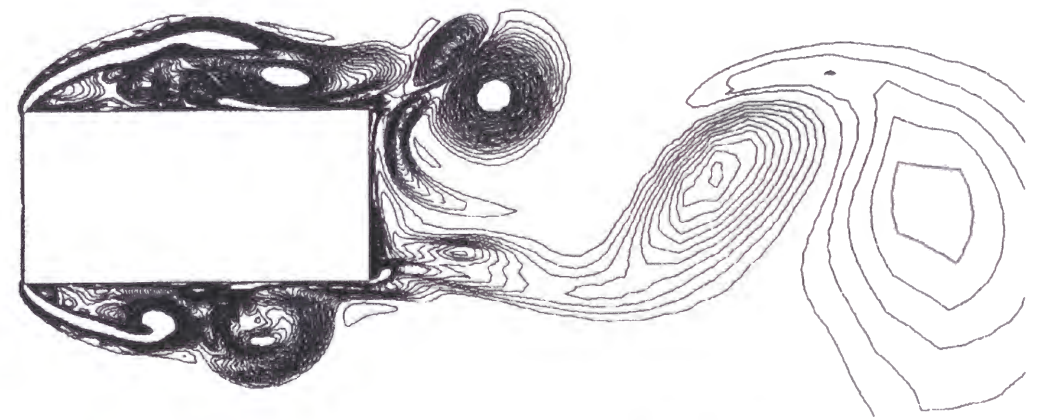


図4.3 静止時における断面まわりの瞬間渦度場 ( $Re=10^4$ )







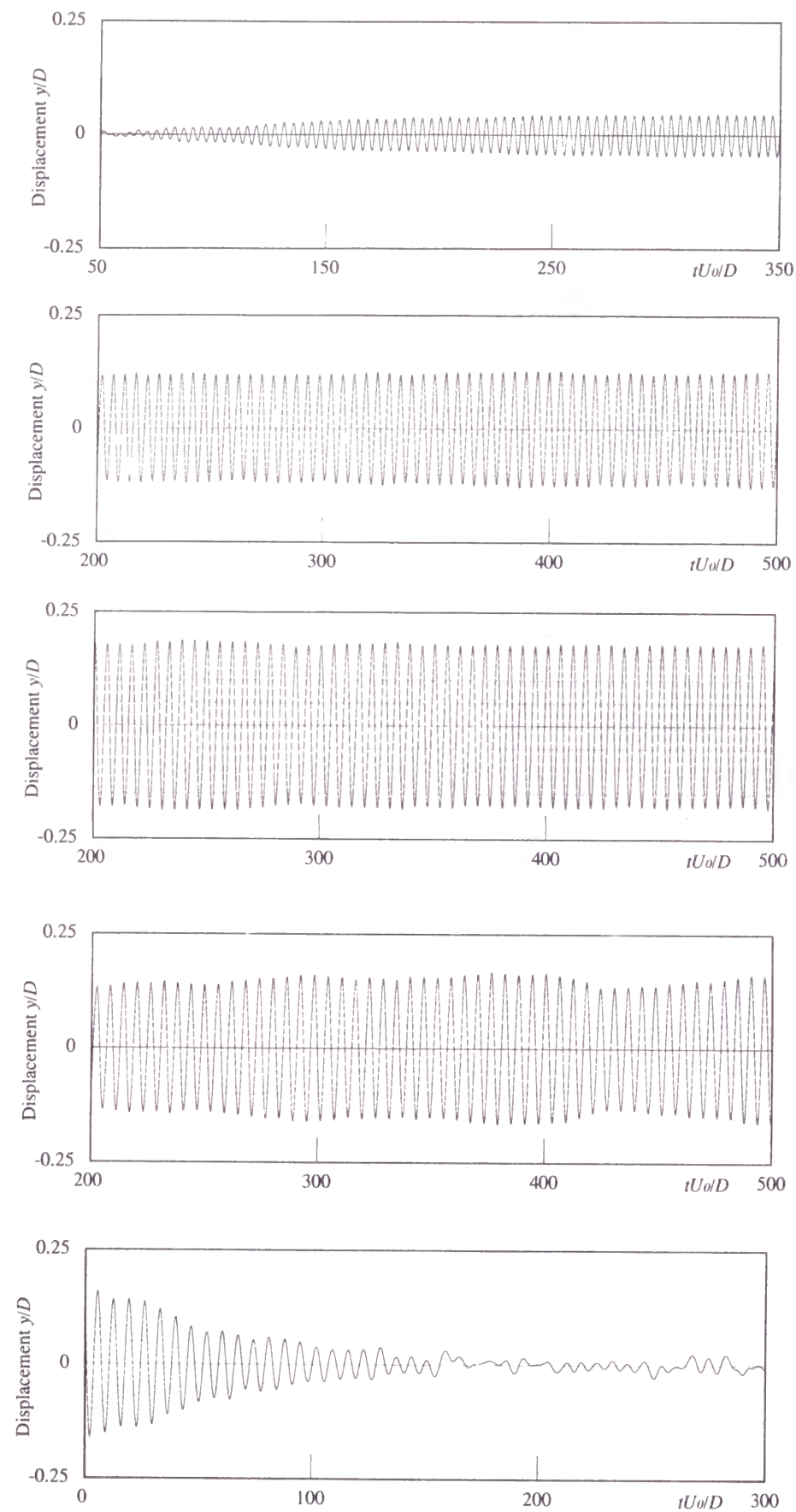


図4.7 変位応答波形 ( $B/D=2.0$ ,  $Sc=2.0$ ,  $Re=10^4$ )

(a)  $Ur=4.0$

(b)  $Ur=5.0$

(c)  $Ur=5.5$

(d)  $Ur=6.0$

(e)  $Ur=7.0$

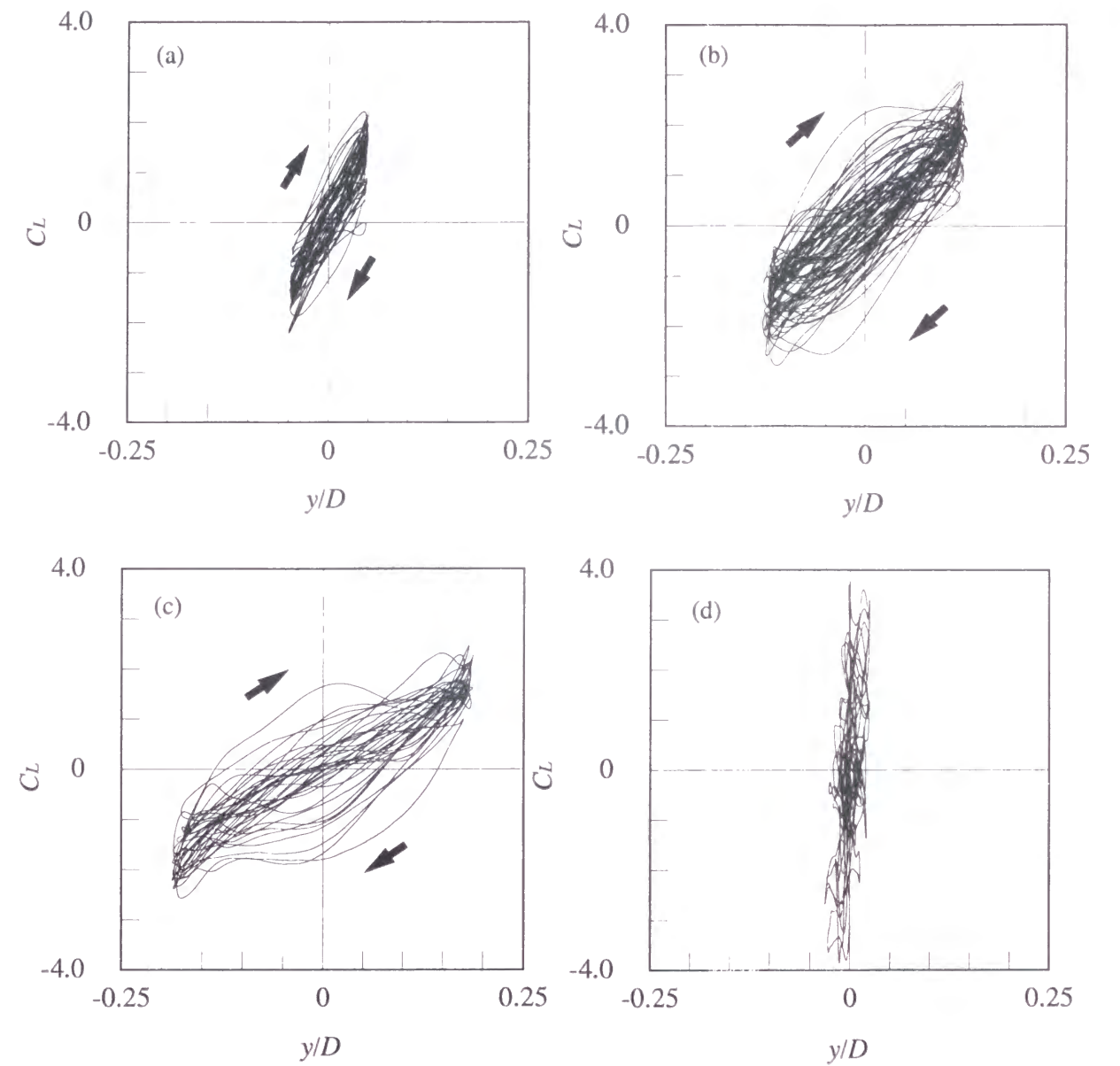


図4.8 無次元応答変位 $y/D$ と揚力係数 $C_L$ のリサージュ ( $B/D=2.0$ ,  $Sc=2.0$ ,)

(a) $Ur=4.0$ , (b) $Ur=5.0$ , (c) $Ur=5.5$ , (d) $Ur=6.0$

を基本的には繰り返しているが、流下渦と後縁二次渦の一体化のタイミングは微妙に変化している。これは調整機能として作用しその結果、定常振動応答のリミットサイクルが保持されているものと考えられる。 $Ur=6.0$ においては応答が急変する境目であり振幅は一定しておらずある幅の中で変動している。側面を流下してきた渦と後縁二次渦との一体化が安定に繰り返される場合に振動振幅は一定に保たれている。 $Ur=3.5$ では振動振幅が急激に減少する。

最大振幅になる $Ur=5.5$ については解析結果は実験値に比較してやや大きめの値をとっている。ただし渦励振の最大振幅については振動振幅の急変する境目であり実験結果にもかなりのばらつきが見られる。

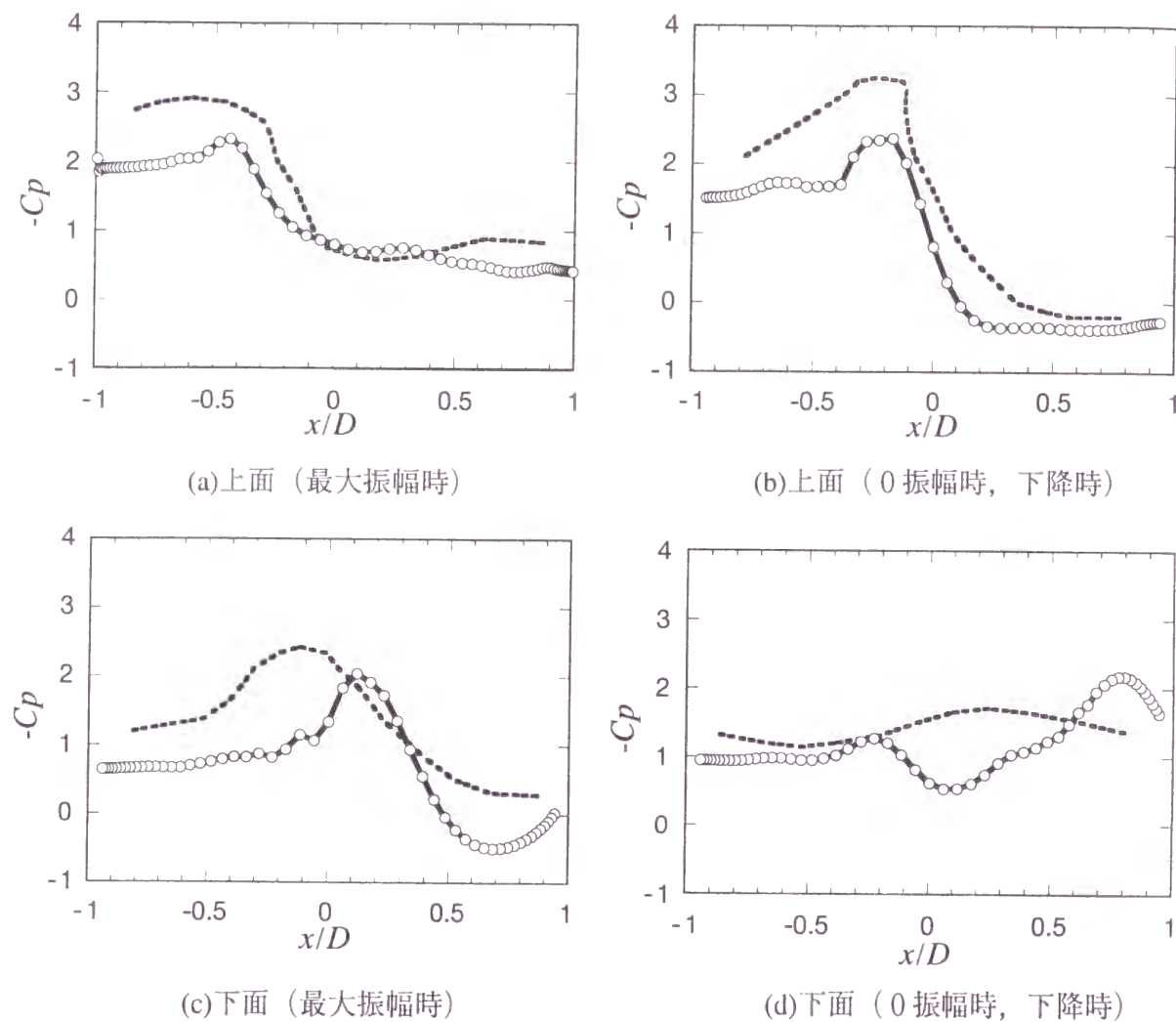


図4.9 振動時の側面上の非定常風圧分布。——：Miyazaki<sup>11)</sup>,  $Ur=5.5$ ,  $y/D=0.1$  (強制加振), ○：本解析,  $Ur=5.0$ ,  $y/D=0.12$  (自由振動時)

#### 4.3.3 振動時の空気力

##### 4.3.3.1 変位と揚力係数のリサージュ

図4.8には各無次元風速における変位と揚力係数のリサージュを示す。いまの場合、変位の自由度は $y$ 方向以外は拘束されているので仕事は揚力によってのみなされる。振動一周のリサージュによって囲まれた部分の面積は振動一周間に揚力によってなされた仕事を表わす。またリサージュのまわる向きは仕事の正負を示す。 $Ur=4.0 \sim Ur=5.5$ ではリサージュは右まわりであり揚力は物体に対して正の仕事をしている。無次元風速の増加に伴ない揚力係数, 振幅

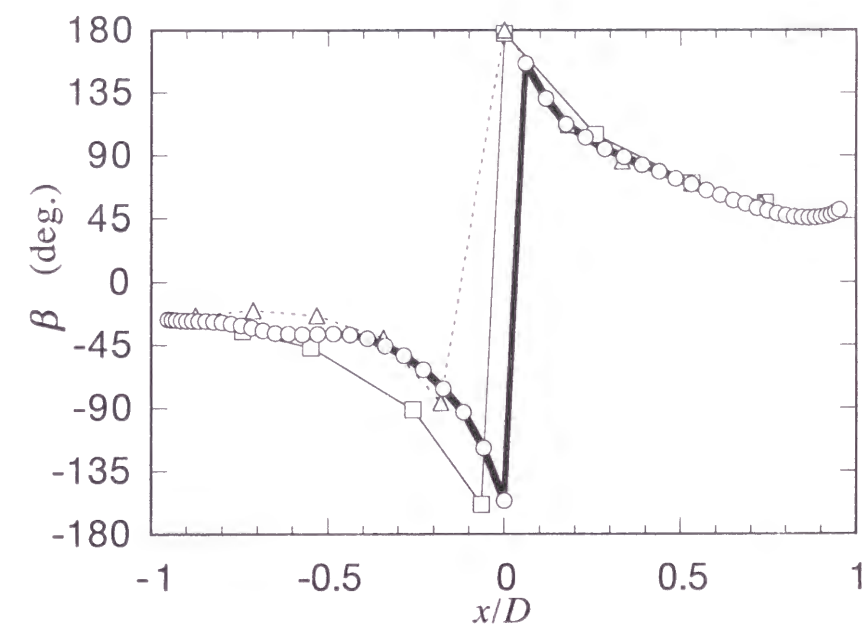
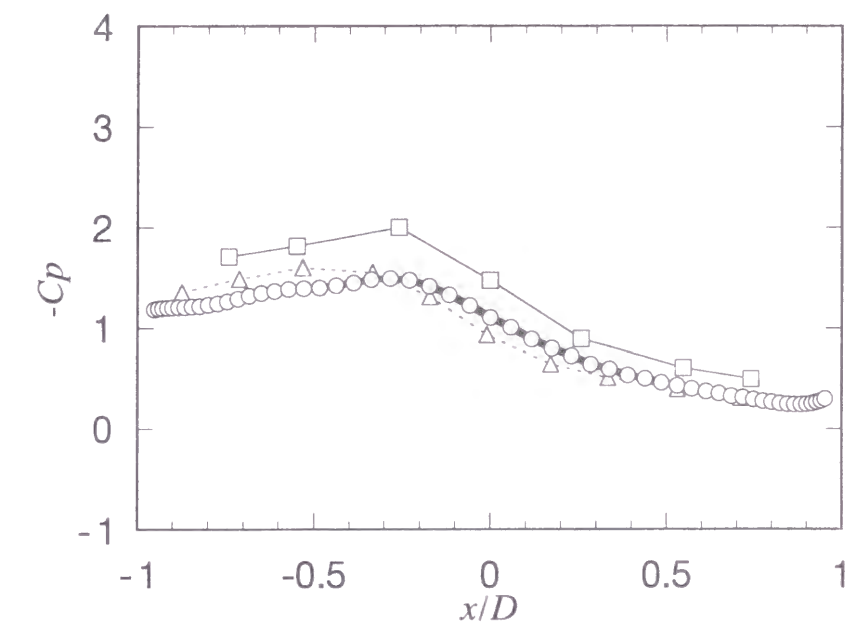
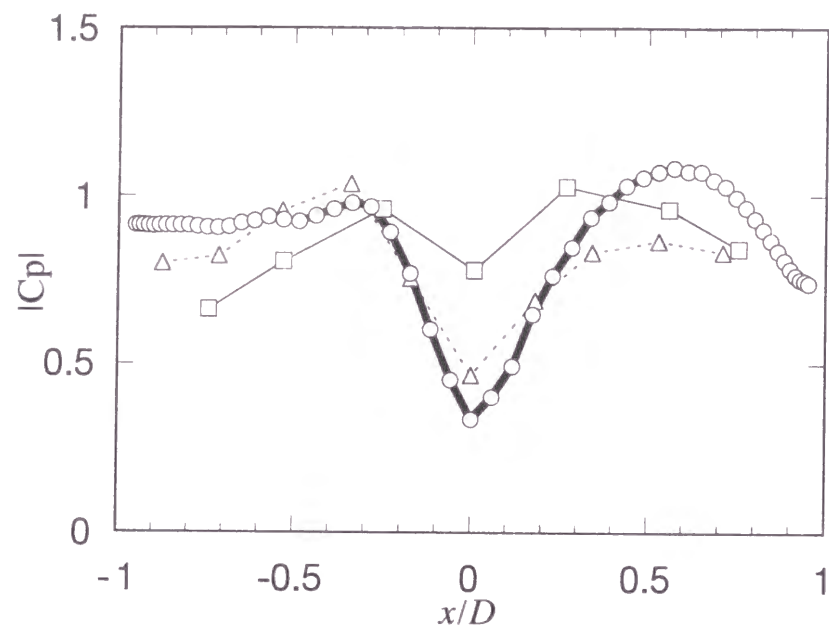
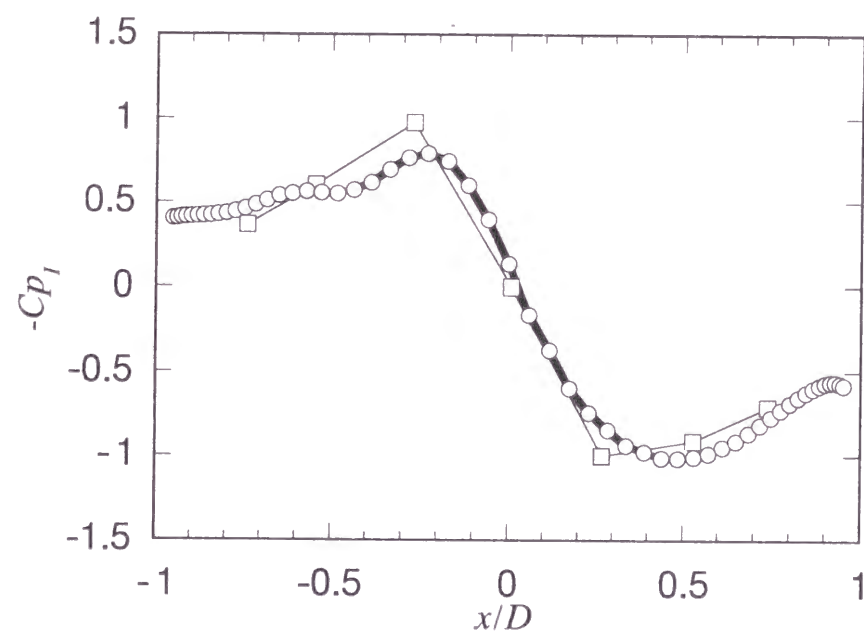


図4.10 非定常風圧分布 ( $Ur=5.0$ ,  $Re=10^4$ ) □：Miyata<sup>15)</sup>,  $Ur=5.5$ ,  $y/D=0.1$  (強制加振), △：田村<sup>6)</sup>,  $Ur=2.5$ ,  $y/D=0.1$ , (2次元数値解析・強制加振), ○：本解析結果,  $Ur=2.5$ ,  $y/D=0.12$  (自由振動時)



(c)  $|Cp_l|$



(d)  $Cp_l$

図4.10 非定常風圧分布 ( $Ur=5.0, Re=10^4$ ) □: Miyata<sup>15)</sup>,  $Ur=5.5, y/D=0.1$  (強制加振), △: 田村<sup>6)</sup>,  $Ur=2.5, y/D=0.1$ , (2次元数値解析・強制加振), ○: 本解析結果,  $Ur=2.5, y/D=0.12$  (自由振動時)

ともに次第に大きくなる。 $Ur=7.0$ になると変位に対して揚力のなす仕事はほとんど零になり励振状態には至っていない。

#### 4.3.3.2 側面上の非定常風圧分布

図4.9には側面上の非定常風圧分布を示す。同図において破線は強制加振実験結果(11)であり、本解析結果は自由振動時のものである。同図(a)および(b)は物体が最大振幅時にあって下降を始める瞬間の、(c)および(d)は物体が下降時に $y/D=0$ となる瞬間における風圧分布をそれぞれ物体上下面について示したもので、解析結果は各瞬間について振動20周期分の平均値として示している。解析結果は特に上面風下側における圧力の回復についてよく強制加振実験結果に対応している。最大振幅時の下面(b)の圧力ピークは図4.5におけるa5またはa6の渦の形成に対応するものである。この圧力ピークが解析結果では実験結果に比べやや風下側に見られるが、これは実験と解析で無次元風速および振動振幅に若干の相違があるため、渦の形成位置が異なってくることにより生じたものと考えられる。

図4.10(a)～(d)には振動時の側面上の非定常風圧に関する諸量を示す。比較のため同図には強制加振実験結果<sup>15)</sup>および強制加振を模擬した格子点数 $400 \times 100 = 40,000$ 点の解析による結果<sup>6)</sup>を示す。

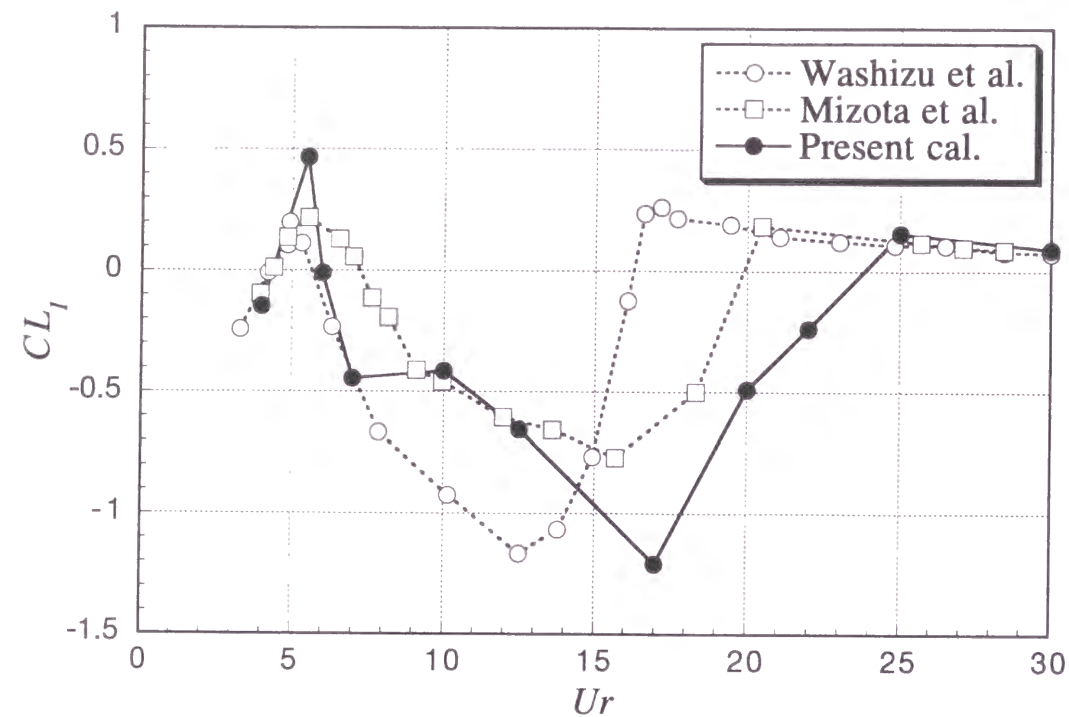
図4.10(a)には振動時の側面上の平均風圧係数分布を示す。無次元風速および振幅の条件は実験および各解析間でわずかにばかりずつ異なっているが負圧のピーク位置や側面風下側における圧力の回復などについて本解析結果は強制加振の解析結果と良い対応にあり、分布の傾向に関しては強制振動実験結果との対応も良い。

振動時に作用する流体力は一般に不規則であるが、その主たる成分はStrouhal成分と固有振動数成分である。この内、振動に主として寄与するのは固有振動数成分である。図4.10(b)～(d)には非定常圧力の物体固有振動数成分の側面上側の分布について示す。図4.10(b)には変位の物体固有振動数成分との位相差 $\phi$ 、図4.10(c)には振幅 $|Cp_l|$ 、図4.10(d)には速度同相成分 $Cp_l$ の分布をそれぞれ示す。解析により得られた位相差の分布(図4.10(b))は風上側においては負に、逆に風下側では正となり実験および解析による強制加振結果から得られた分布に一致している。この分布に対応し速度同相成分 $Cp_l$ の分布(図4.10(d))は風上側で負となり減衰力に、風下側では正となり加振力となっており、解析結果は強制加振の実験および解析結果と良く対応している。

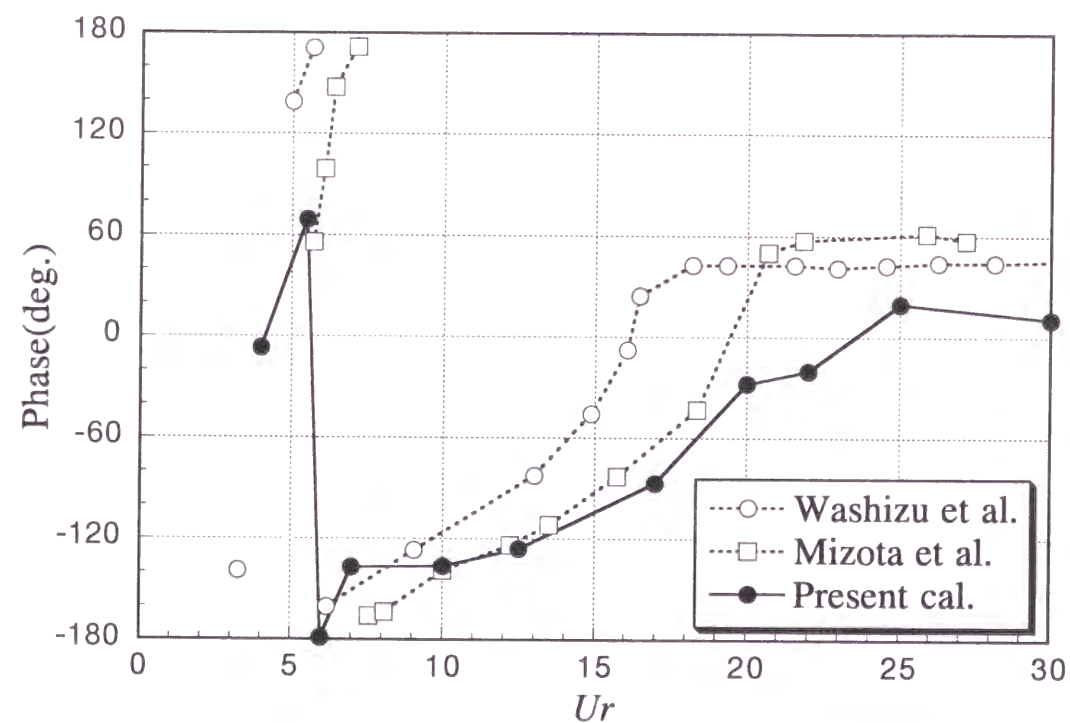
#### 4.3.3.3 強制加振時の非定常空気力

図4.11には加振振幅 $y/D=0.1$ で強制加振した場合の非定常空気力の無次元風速による変化を示す。同図(a)には速度同相成分を示すが、 $Ur=5.5$ 近辺と $Ur>20$ で正となっておりそれぞ





(a) 速度同相成分



(b) 加振変位との位相差

図4.11  $B/D=2.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の非定常空気力係数

れ励振の可能性を示している。前者は自己励起型渦励振であり、後者はKarman型渦励振およびギャロピングであると考えられる。同図にはWashizu et al.<sup>14)</sup>および溝田ら<sup>15)</sup>の実験結果も示すが、本解析結果は高無次元風速側の励振発生は実験値に比べて高無次元風速側にシフトしている。実験結果に見られる $Ur=12$ 近辺からの励振力の発生はKarman渦発生に伴っている。したがって本解析はKarman渦発生周期を長めに、すなわちStrouhal数を小さめに評価する傾向がある。したがってKarman型渦励振およびギャロピングの発生風速は高めに評価される可能性があるものと考えられる。

#### 4.4 結論

一様流中における断面辺長比 $B/D=2$ の並進一自由度の渦励振について二次元非圧縮性Navier-Stokes方程式を三次精度風上差分を用いた差分法で解くことによる数値解析を行ない、二次元解析の可能性について流れ場の形成過程、振動応答および振動時非定常風圧力の面から既往の研究結果との比較による検討を行ない、以下のような結論を得た。

(1) 解析によって得られた前縁剥離渦の断面側面上の流下および後縁二次渦との一体化にわたる断面近傍の流れ場の形成過程は既往の研究結果と同様な結果を示した。

(2) 解析結果は渦励振のピーク時において大きめの値を与えるものの、渦励振の限界風速および最大振幅を与える風速は既往の研究結果と概ね同様な傾向を示し、限定振動の様相を再現している。

(3) 解析によって得られた振動時の側面の非定常風圧分布は既往の強制加振実験および強制加振を模擬した解析結果と同様な傾向を示し、作用空気力の点からも渦励振の状態が再現されていることが確認された。

(4) 強制加振による非定常空気力は実験結果を概ね再現してはいるが、高無次元風速側の励振力は実験値に比べて高無次元風速側で発生している。したがってKarman型渦励振およびギャロピングの発生風速は高めに評価される可能性があるものと考えられる。

## 参考文献

- 1) Komatsu S., Kobayashi H., Vortex Induced Oscillation of Bluff Cylinders, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 6 (1980) 335 - 362.
- 2) 白石成人・松本勝, 充実構造断面の渦励振特性に関する研究, 土木学会論文報告集, 第322号, 1982年6月, 17 - 50.
- 3) Nakamura, Y., Nakashima, Vortex Excitation of Prisms with Elongated Rectangular H and T Cross Section, M., *J. Fluid Mech.* (1986), vol.163, 149 - 169.
- 4) Hartlen, R. T. and Currie I. G., Lift-oscillator model of vortex-induced vibration, *Proc. of the ASCE, J. of Engineering Mechanics*, EM5(1970), 557 - 591.
- 5) 田村幸雄, 円筒の渦励振に関する研究 その2, 日本建築学会論文報告集, 第280号, 1978年6月, 67 - 77.
- 6) 田村哲郎・桑原邦郎, 角柱の空力不安定振動のシミュレーション, 第四回数值流体力学シンポジウム論文集(1989), 523 - 526.
- 7) Tamura T., Itoh Y., Wada A. and Kuwahara K., Numerical Investigation on the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders, *J. of Wind Engineering*, No.52, Aug. (1992), 505 - 510.
- 8) Kawamura, T. and Kuwahara, K., Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness, *AIAA paper*, 84-0340, (1984)
- 9) 泉元・谷口伸行・川田裕・小林敏雄・足立武司, 円柱周りの3次元流動解析(第一報, 静止円柱の場合), 機論, 60-579, B (1994), 207 - 214.
- 10) 山田均・宮田利雄・山下幸俊, 長方形断面柱のたわみ渦励振の剥離流に関する初期迎角の支配効果, 第7回風工学シンポジウム論文集(1982), 243 - 250.
- 11) 宮崎正男, 箱桁断面の空力不安定振動の抑制, 第7回風工学シンポジウム論文集(1982), 187 - 194.
- 12) 宇都宮英彦・長尾文明・畠山圭司, 充腹断面の空力不安定現象に関する風洞実験における2,3の考察, 第8回風工学シンポジウム論文報告集(1984), 327 - 332.
- 13) Takeda K. and Kato M., Wind tunnel blockage effects on drag coefficient and wind-induced vibration, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 42 (1992), 897 - 908.
- 14) Washizu, K., Ohya, A., Otsuki, Y. and Fuji, K. : Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode, *J. of Sound and Vibration*, 59(2), p.195-210, 1978
- 15) 溝田武人, 中村泰治: 矩形断面柱の非定常揚力と後流の速度変動について, 構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム, p.201-208, 1974.12
- 16) Miyata T., Miyazaki M. and Yamada H., Pressure Distribution for Wind Induced Vibration of Box

Girder Bridge, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 14 (1983), 419 - 430.

- 17) Washizu, K., Ohya, A., Otsuki, Y. and Fuji, K. : Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode, *J. of Sound and Vibration*, 59(2), p.195-210, 1978





## 第5章 並進1自由度空力振動予測への適用性の検討

### 5.1 概要

空力弾性振動の評価では、確率統計量が一定になるまでに無次元時間で数百からの解析を行う必要がある。さらに無次元風速および質量減衰比等の構造パラメータを種々に変える必要もあり、3次元解析によってこれらをパラメトリックに行うことは実用的にはかなりの負荷とならざるをえない。一方、乱流拡散の効果を適切に取り入れることにより2次元解析による完全なく離型の現象再現の可能性も示されている<sup>1)</sup>。ところで第1章において示したように矩形断面柱の空力振動は辺長比によって多様な振動形態を呈する。以下本章では修正型 $k-\epsilon$ モデルを用いた2次元解析により完全なく離型および再付着型断面の挙動が統一的に再現されるかどうかを検討した。本章では完全なく離型の断面として $B/D=2$ を、周期的再付着型断面として $B/D=4$ 矩形断面をとりあげ、それらの強制加振時の空気力および自由振動時の応答を既往の実験結果および本実験結果と比較を通してなく離渦が重要となる空力振動問題への適用性について検討する。

### 5.2 解析方法

本章では振動応答を考慮するので、第2章に示したように時間まで含めた一般座標変換を行う。ただし本章では風直角方向の $x_2$ 方向並進振動のみを扱うので、この場合は第2章において示したように格子が変形せずに物体とともに動くとするれば解くべき方程式は(5.1)式～(5.4)式のように表すことができる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + (U_j - \dot{x}_j) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( P + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \nu_i \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (U_j - \dot{x}_j) \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + P_k - \epsilon \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (U_j - \dot{x}_j) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_i}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + (C_{\epsilon_1} P_k - C_{\epsilon_2} \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \quad (5.3)$$

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (U_j - \dot{x}_j) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu_i \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \right] - \frac{\partial D}{\partial t} \quad (5.4)$$

ここで $\dot{x}_j (j=1,2)$ は格子点の移動速度で、いまの場合物体の移動速度に等しいとする。

### 5. 3 解析結果

#### 5. 3. 1 $B/D=2$ 断面の強制加振時の非定常空気力

$B/D=2.0$ の矩形断面柱は時間平均的には完全剥離型に属するが、はく離せん断層の側面への非定常な再付着を伴うことから再付着型にも属する。したがってその空力弾性挙動ではそれぞれに特徴的であるギャロピングおよび自己励起型渦励振を呈し、数値計算によって空力弾性振動を再現する上でも興味ある辺長比であるといえる。スパン方向流速を無視した2次元解析<sup>20)</sup>では自己励起型渦励振は再現されるものの、はく離せん断層の揺動性が重要になる完全はく離型の挙動は捕らえられず、ギャロピングは再現されなかった。この場合、ひとつの解決策としての3次元解析<sup>2)</sup>では種々の構造諸元についてギャロピングおよび自己励起型渦励振に関して、既往の諸実験結果との比較が行われている。

加振変位が  $y_m(t) = \Re[Y_m e(i\omega_m t)]$  のように表される場合、非定常揚力の加振振動数成分  $CL_m$  は以下のように表される。

$$CL_m(t) = \Re[(CL_R + iCL_I) \cdot e^{i\omega_m t}] \quad (5.5)$$

$$CL_R = |CL_m| \cdot \cos \beta_L \quad (5.6)$$

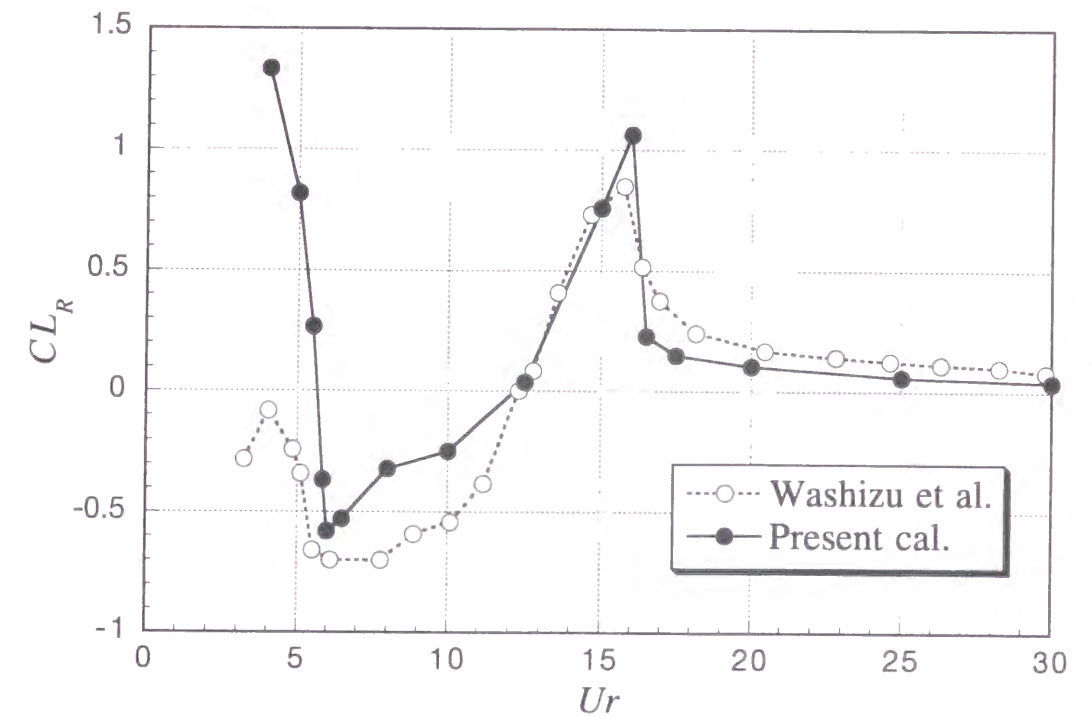
$$CL_I = |CL_m| \cdot \sin \beta_L \quad (5.7)$$

$$|CL_m| = \sqrt{CL_R^2 + CL_I^2} \quad (5.8)$$

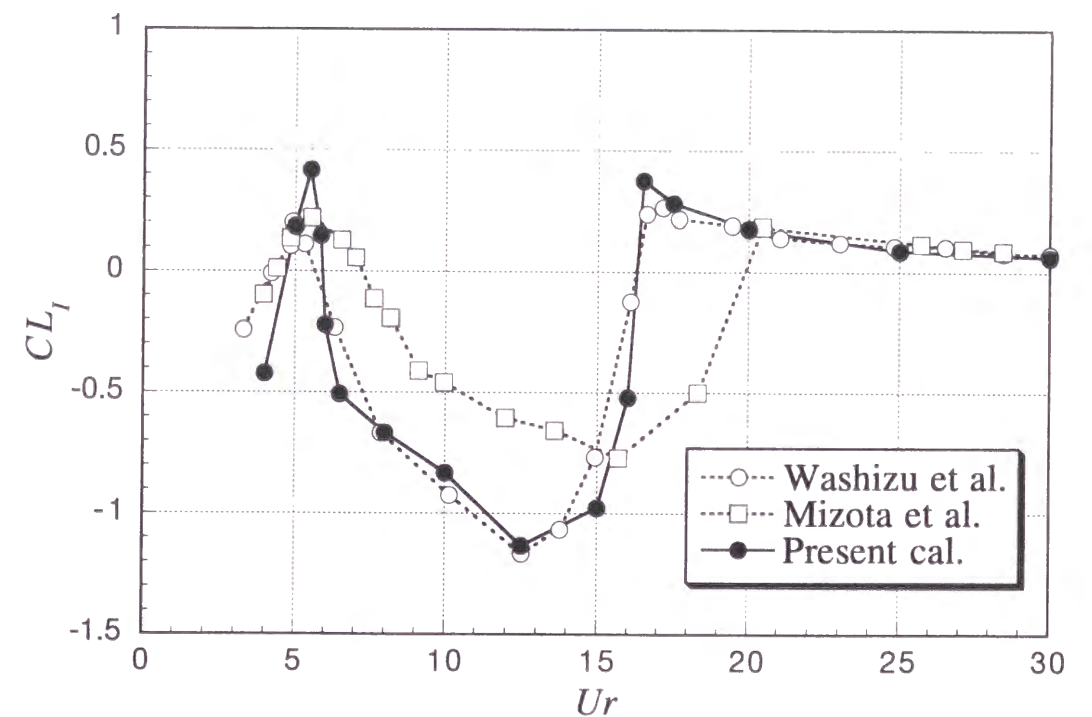
$$\beta_L = \tan^{-1} \left( \frac{CL_I}{CL_R} \right) \quad (5.9)$$

これらを解析結果から求めるには時系列を Fourier 変換し  $CL_R$  はその Fourier cosine 係数、 $CL_I$  は Fourier sine 係数として求めた。図 5. 1 には並進の強制加振（加振振幅  $0.1D$ ）による非定常空気力を示す。自己励起型渦励振が発現する  $Ur=5$  近辺とギャロピング領域の  $Ur > 15$  で加振振動数成分の速度同相成分は正になっており振動発現の可能性を示し、既往の実験結果<sup>3,4)</sup>ともよい対応を示している。

図 5. 2 には  $Ur=5.5, 13.5$  および  $24.0$  のときの非定常風圧係数の側面上の分布を示す。 $Ur=5.5$  では  $Cp_f$  は風上側 ( $x/D < 0$ ) で  $Cp_f < 0$ 、風下側 ( $x/D > 0$ ) で  $Cp_f > 0$  となっており風上側が減衰力、風下側が励振力となっている。 $Ur=13.5$  では側面全体で  $Cp_f < 0$  となり、加振振幅  $y/D=0.1$  では断面には減衰力が作用することがわかる。 $Ur=24$  では  $Cp_f \approx 0$  となり、 $Ur=13.5$  よりはやや回復し、ギャロピング発現の兆候が現れる。図中には Miyata *et al.* による強制加振実験結果を示すが、本解析結果は非定常風圧係数の面でも実験結果とよい一致を示している。図 5. 2 には解析を行ったそれぞれの無次元風速における渦度、圧力コンターおよび空気力の時系列波形を示す。無次元風速が高くなるにしたがい側面上の非定常風圧係数は一様な分布を示すようになる。

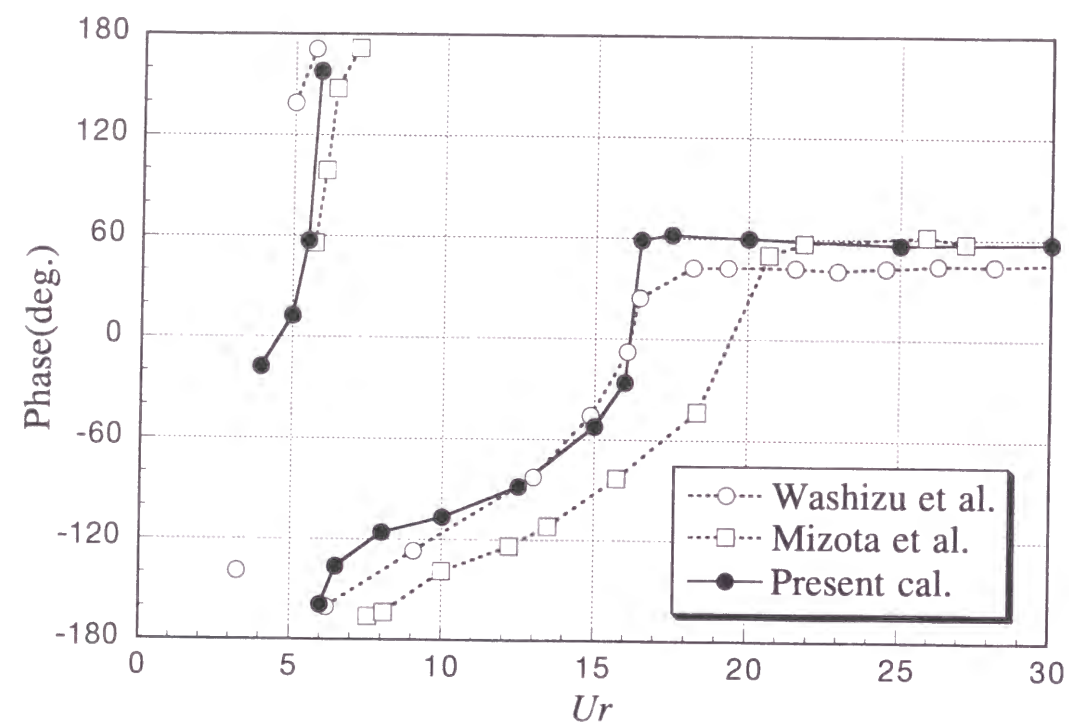


(a)変位同相成分

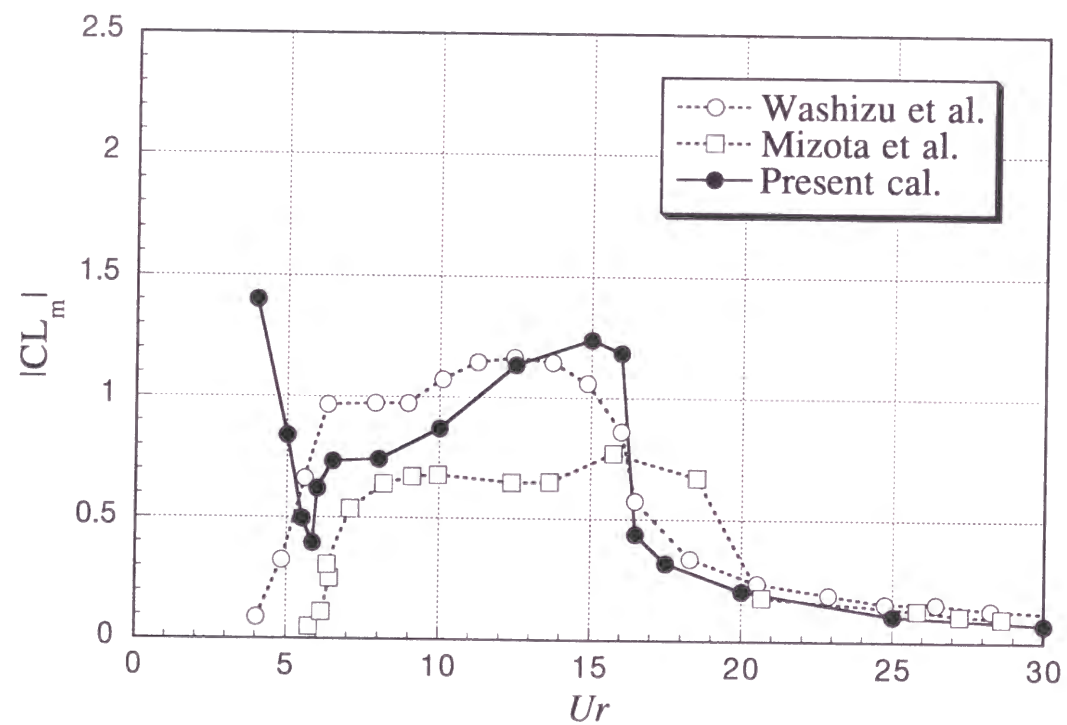


(b)速度同相成分

図 5. 1  $B/D=2.0$  並進強制加振時（加振振幅  $0.1D$ ）の非定常空気力係数

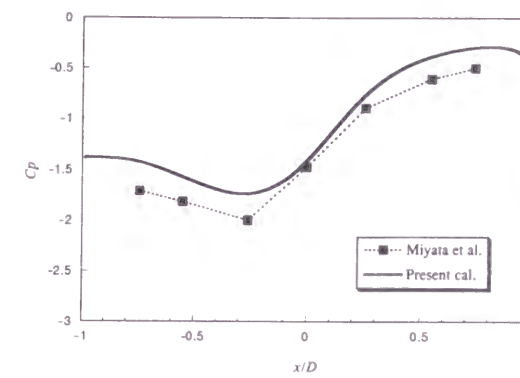


(c)Phase

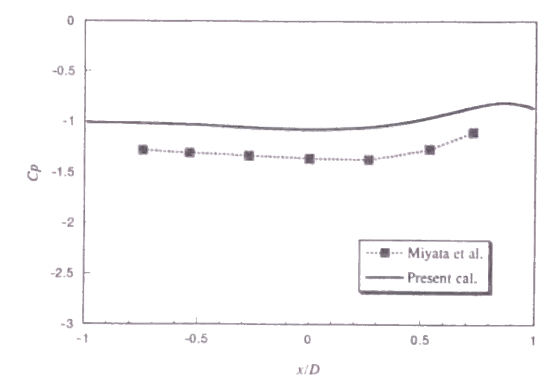


(d)絶対値

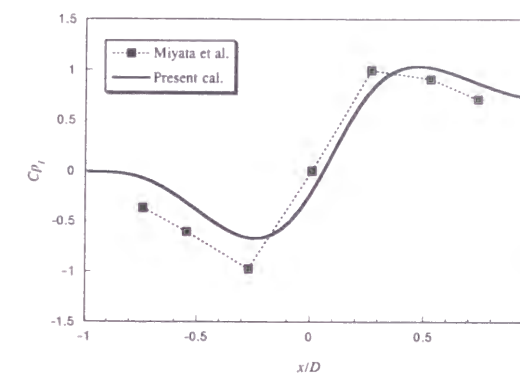
図 5. 1  $B/D=2.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の非定常空気力係数



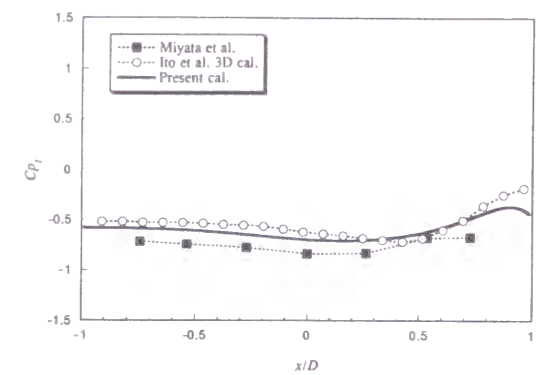
(a) $C_p (Ur=5.5)$



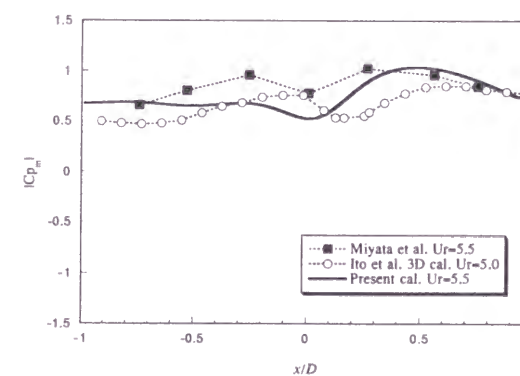
(e) $C_p (Ur=13.5)$



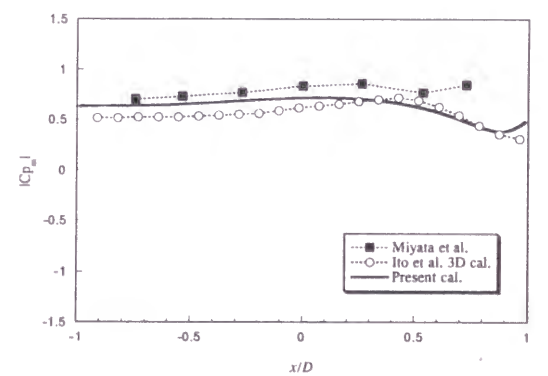
(b) $C_{p_l} (Ur=5.5)$



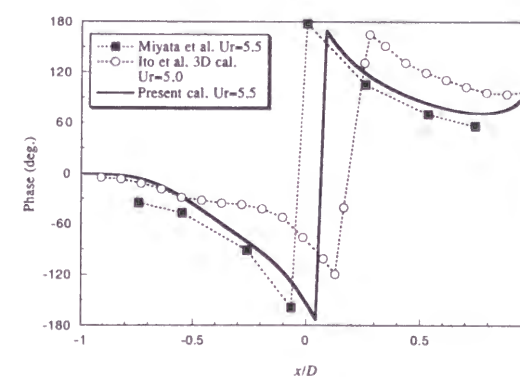
(f) $C_{p_l} (Ur=13.5)$



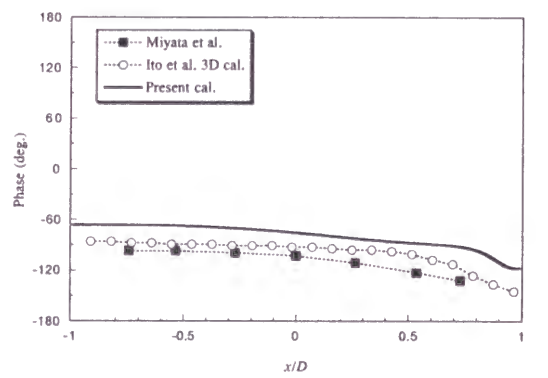
(c) $|C_{p_m}| (Ur=5.5)$



(g) $|C_{p_m}| (Ur=13.5)$



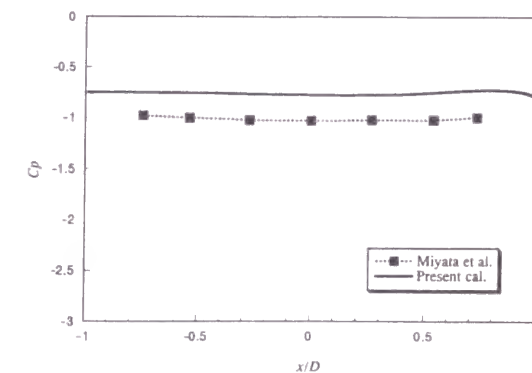
(d)Phase ( $Ur=5.5$ )



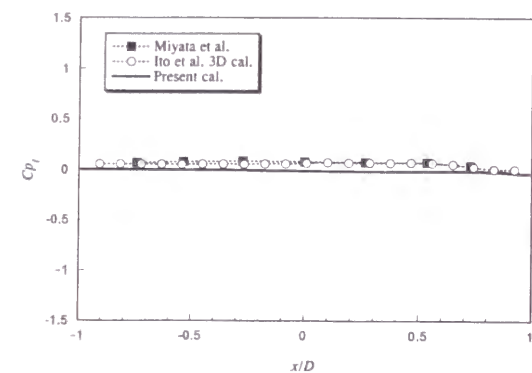
(h)Phase ( $Ur=13.5$ )

図 5. 2  $B/D=2.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の非定常風圧係数

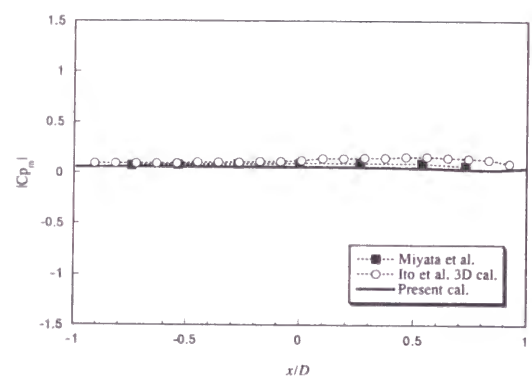




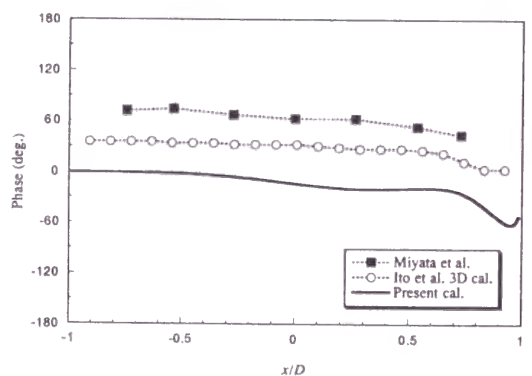
(i)  $C_p (Ur=24)$



(j)  $C_{l_i} (Ur=24)$



(k)  $|Cp_m| (Ur=24)$



(l) Phase ( $Ur=24$ )

が、このことはこれらの流れ場の様子からもわかるように、無次元風速が高くなるにしたがい、はく離せん断層の揺動が空気力形成に重要になってくることを示している。

### 5.3.2 並進1自由度弾性支持された $B/D=2$ 断面の解析

渦励振は Scruton 数 ( $Sc=2m/(\rho BDH) \cdot 2\pi h, H$ : スパン方向長さ,  $m$ : 質量,  $h$ : 減衰定数,  $\rho$ : 空気密度) によって整理されるが、ギャロピングの応答振幅は例えば準定常理論によれば質量比にも依存する。したがって渦励振からギャロピングに至る一連の比較を行うためには、質量比と減衰定数がそれぞれ明らかである必要がある。解析結果は表5.1に示す既往の実験結果<sup>5,6)</sup>と比較した。図5.3には弾性支持された場合の応答解析結果および既往の実験結果を無次元風速 ( $Ur=U_\infty/n_0D$ ,  $n_0$ : 固有振動数) と無次元振幅  $y/D$  の関係について示す。図5.4には主な無次元風速における最大振幅時の瞬間渦度場を、また図5.5には振動時風力と振動の時系列を示す。

図5.5(a)には自己励起型渦励振発現直後の  $Ur=4$  における静止状態から定常状態にいたるまでの揚力変化を示す。はじめは Strouhal 数成分の変動をしているが、 $tU_\infty/D=275$  で振動数成分が混在し始め、 $tU_\infty/D=450$  では Strouhal 数成分が完全に消失し固有振動数成分のみになっている。またこのとき抗力も小さくなっている。渦放出は振動周期に同期しており(図5.4(a)), 静止時とは全く異なる様相を呈している。このような過渡性状は3次元解析<sup>9)</sup>と同様に本解析のような2次元解析によっても明瞭に再現されている。 $Ur=5.5$  では  $y/D=0.175$  で自己励起型渦励振が最大

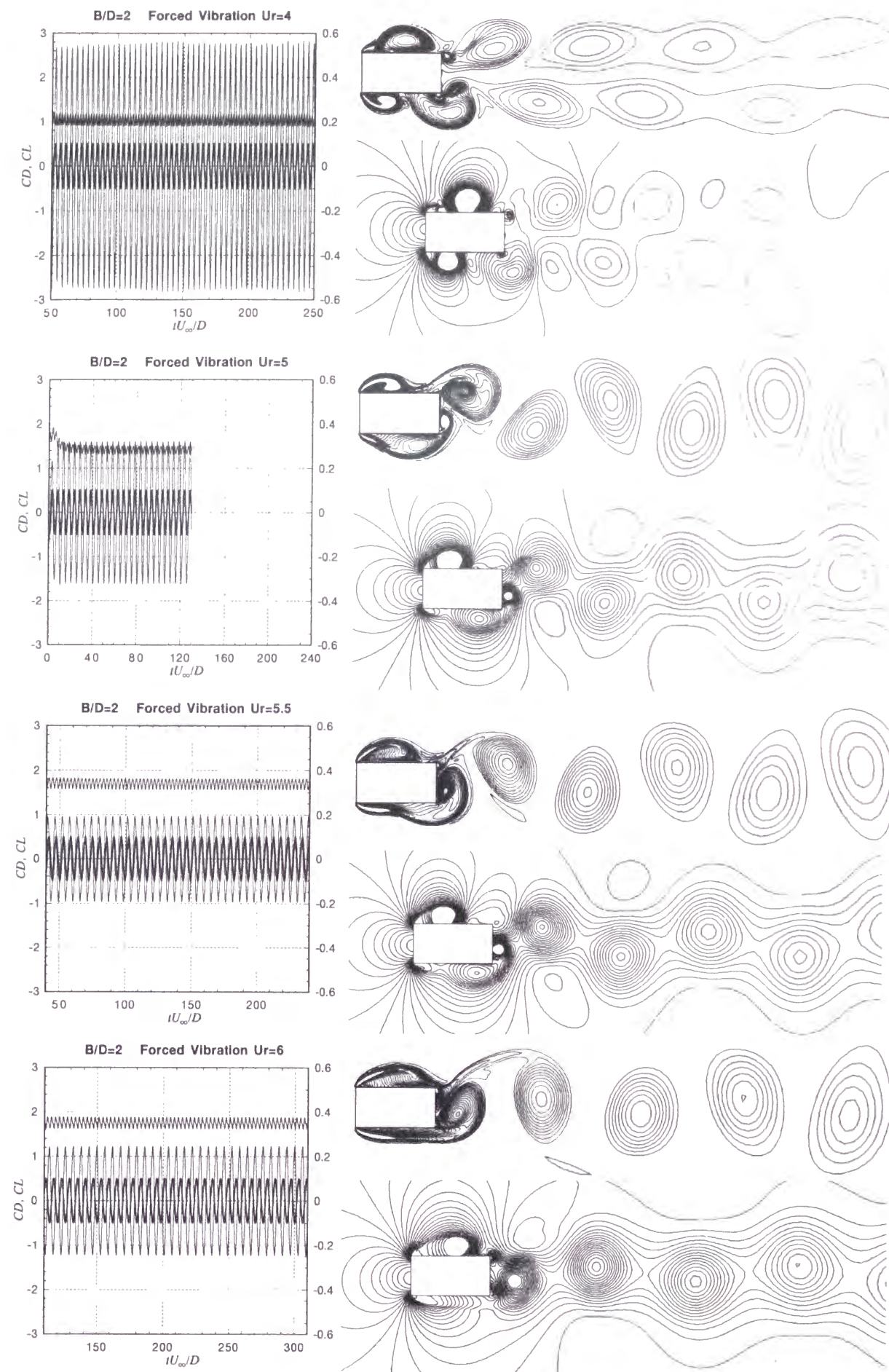


図5.3  $B/D=2.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の渦度、圧力、空気力の時系列



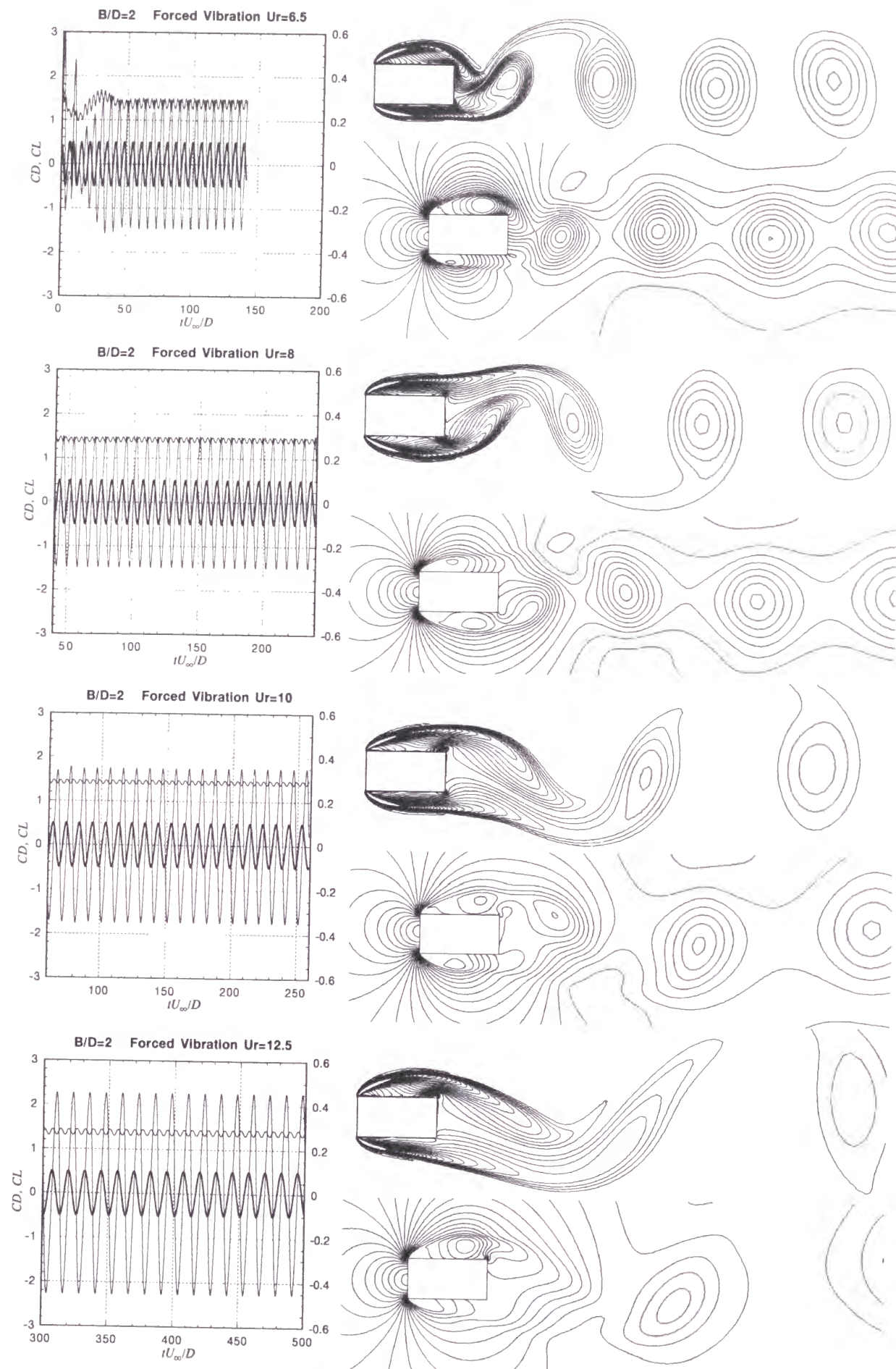


図 5. 3  $B/D=2.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列

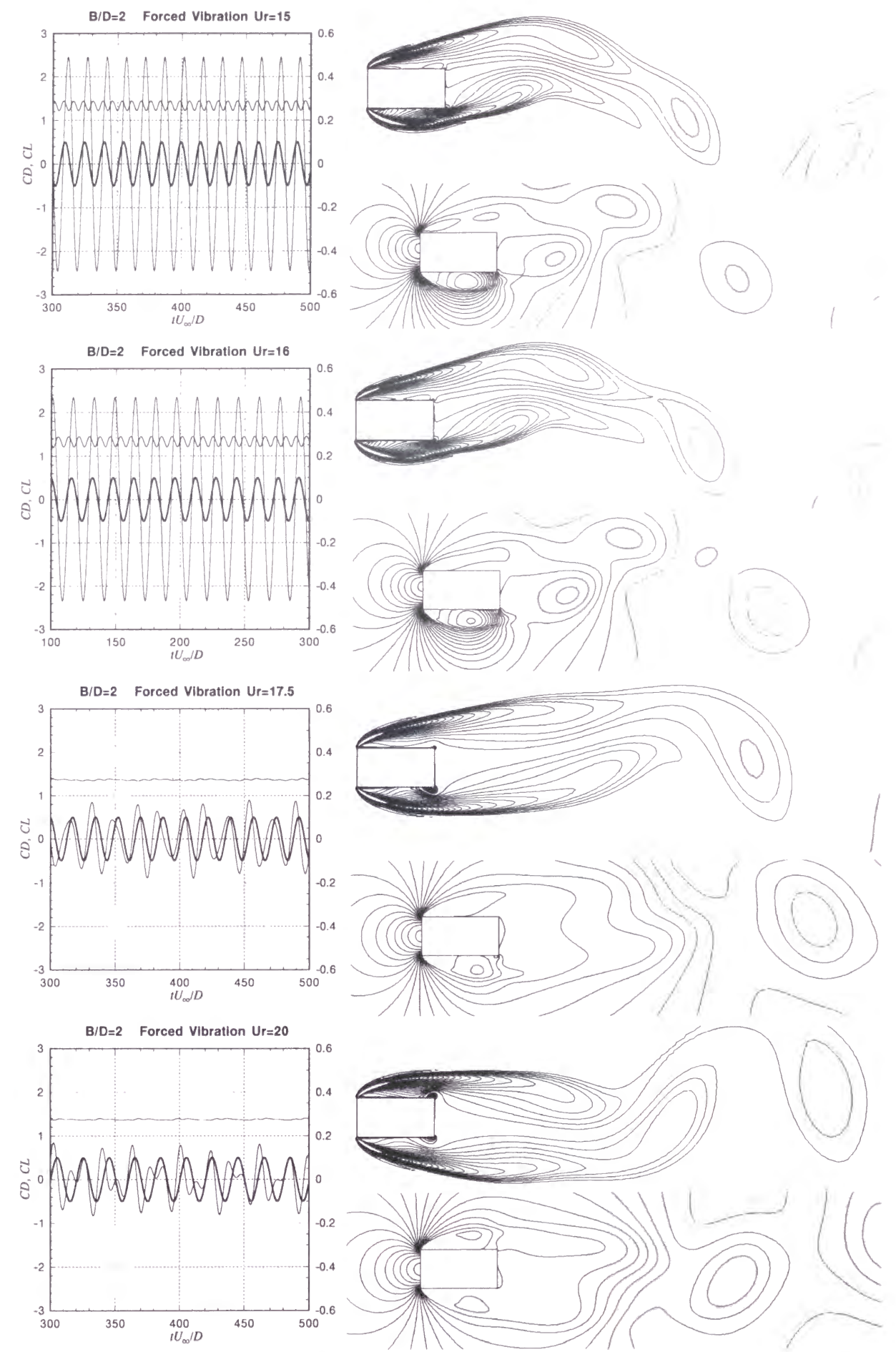


図 5. 3  $B/D=2.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列



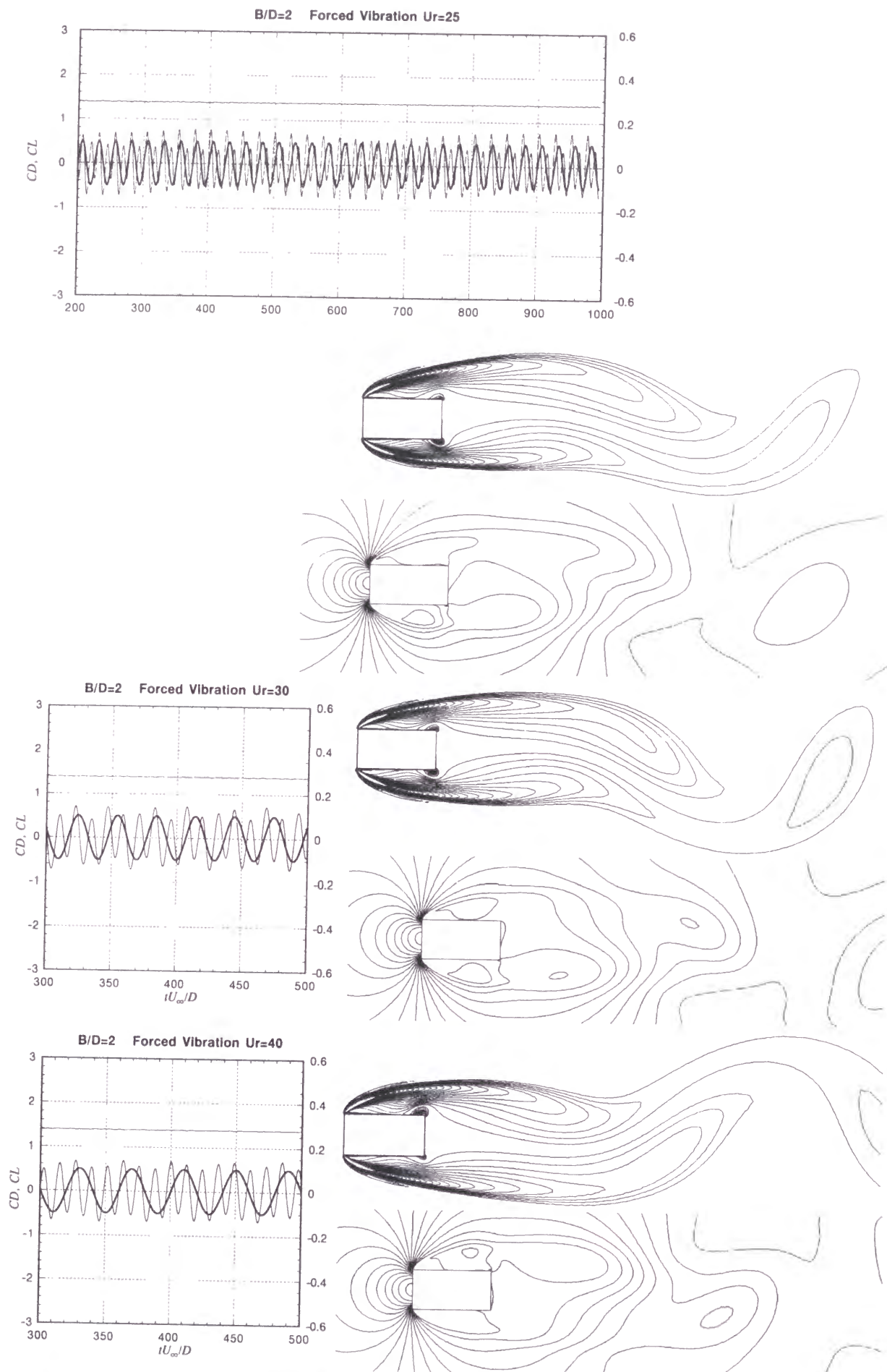


図5.3 B/D=2.0 並進強制加振時（加振振幅0.1D）の渦度，圧力，空気力の時系列

表5.1 振動解析における構造パラメータ

	Sc	Mass ratio	Logarithmic damping
Takeda & Kato(1992)	1.6	302	0.0053
Miyazaki(1982)	3.0	750	0.0040
Present cal.	2.0	500	0.0040

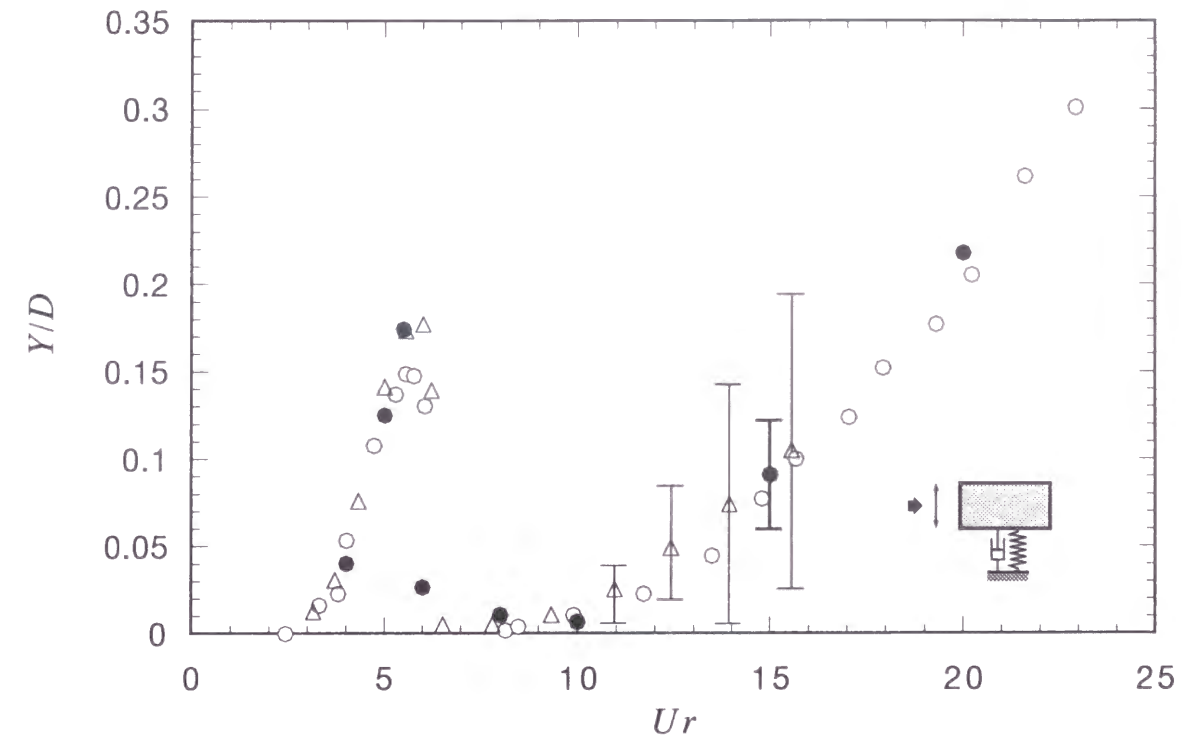


図5.4 B/D=2 矩形断面柱の無次元応答振幅の無次元風速による変化  
△: Takeda & Kato<sup>5)</sup>, ○: Miyazaki<sup>6)</sup>, ●: Present cal.

振幅となる。この時の揚力変動は正弦波状である(図5.5(b))。また、平均抗力は静止時に比べて大きく、背圧変動も大きい。これは後縁で形成される強い渦度を持つ後縁2次渦が存在するためである(図5.4(b))。この渦は角柱前縁からの側面流下渦と融合し後流に放出され<sup>7,10)</sup>、渦励振時では渦の側面の流下が空気力生成にとって重要になる。このように  $Ur=5.5$  では角柱まわりの流れのパターンは他の振動時とは完全に異なっている。 $Ur=8$  では渦放出は振動に同期しなくなり振幅は  $y/D=0.01$  と小さくなる。振幅は小さいが、流れのパターンは静止時とは異なり、依然振動周期に応じて渦が放出されている(図5.4(c))。 $Ur=10$  付近から立ち上がる振動は  $St=0.085$  の逆数で求まる共振風速  $Ur=12$  によるKarman渦型の渦励振であると考えられる。 $Ur=15$  では固有振動数と揚力のKarman渦成分の振動数とが近く、振動波形にはビートが見られる(図5.5(c))。このとき図5.3には解析によって得られた振幅の変動幅も示すが、実験



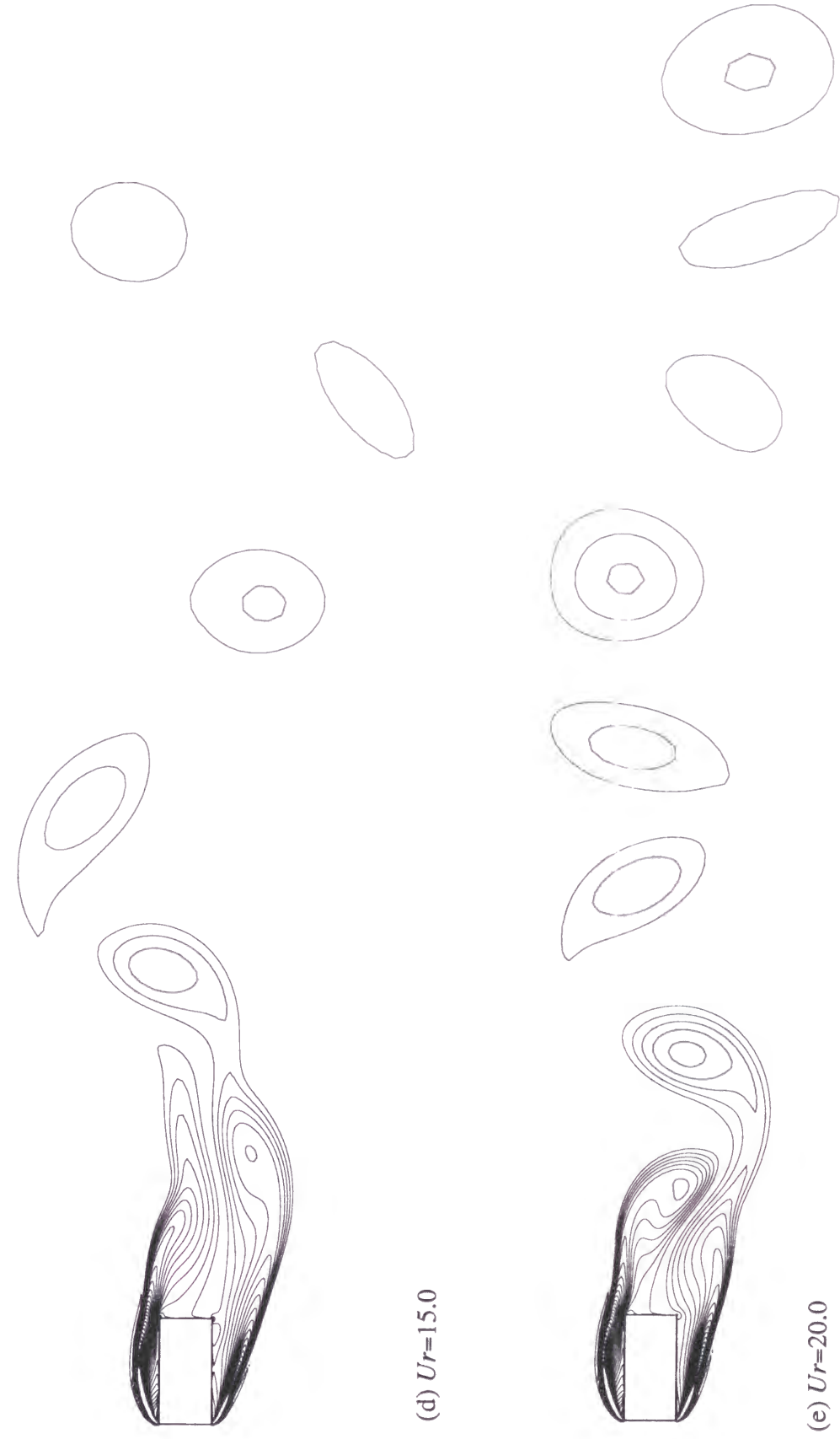
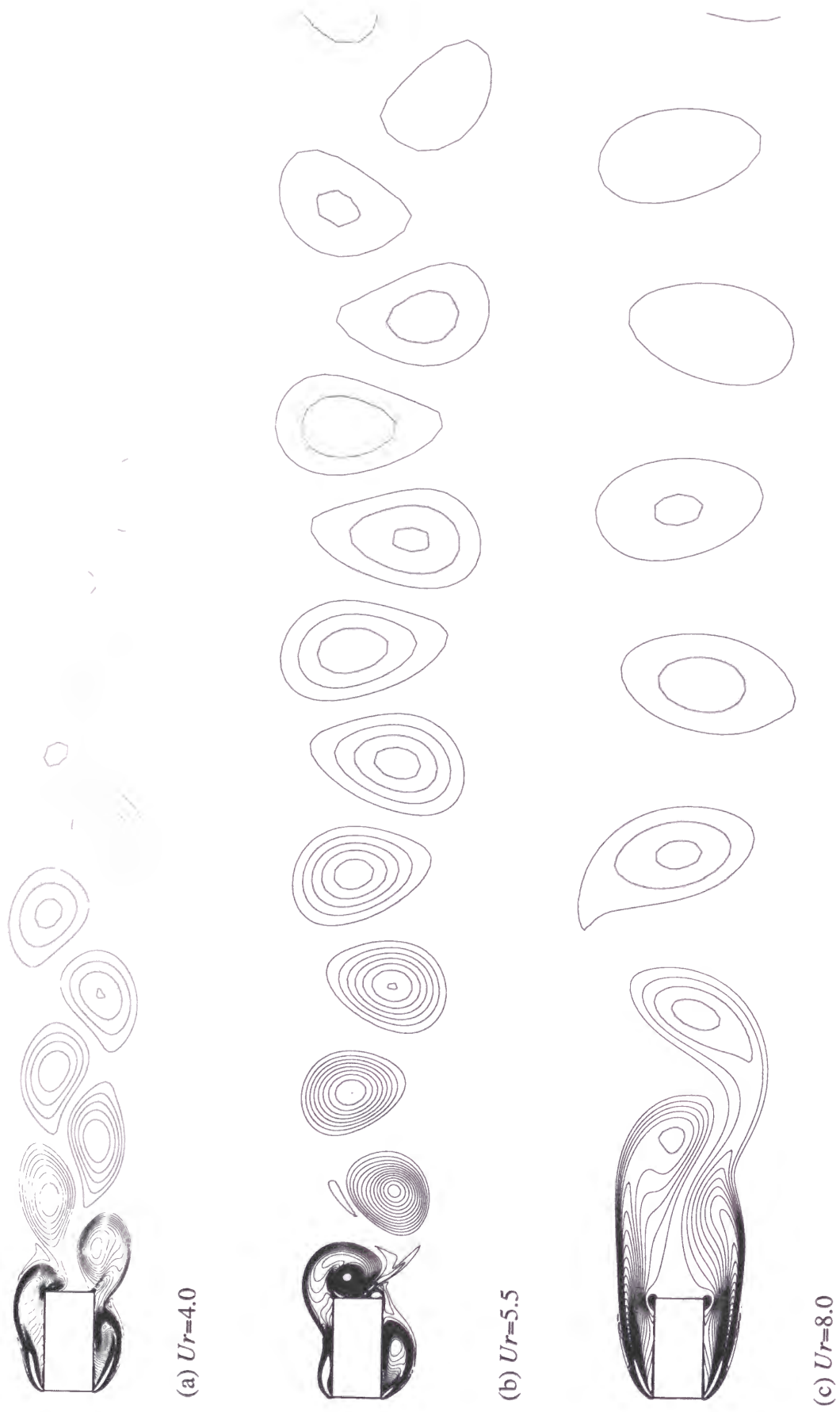
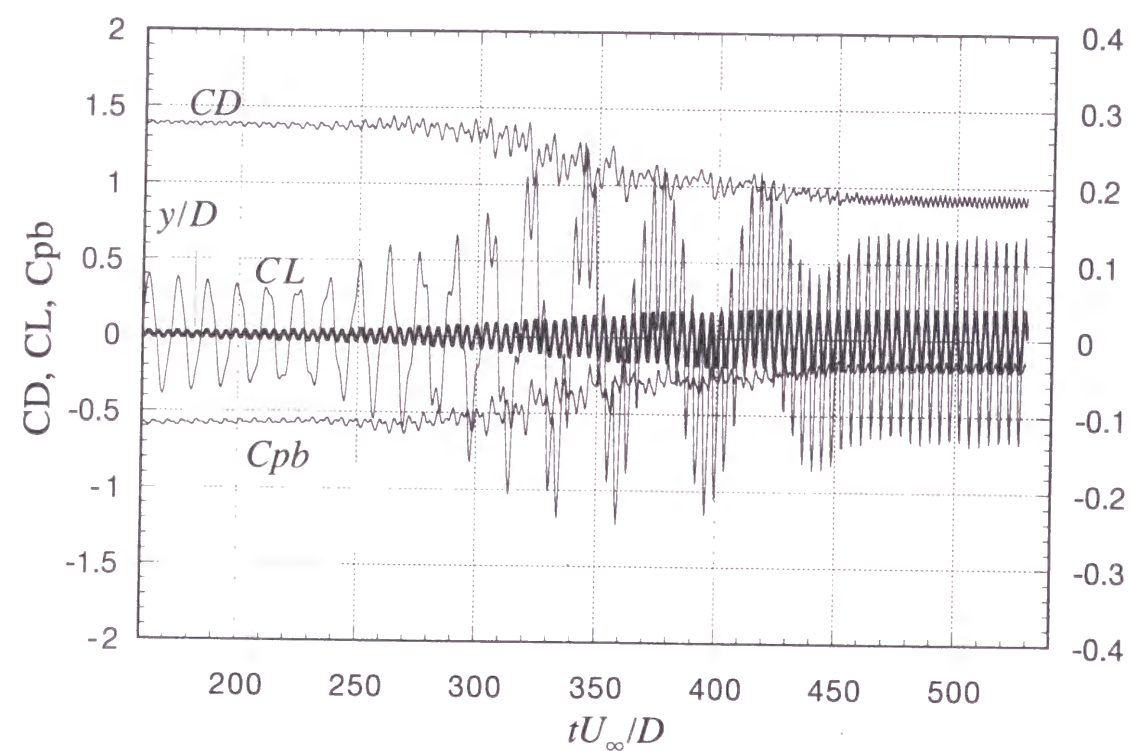
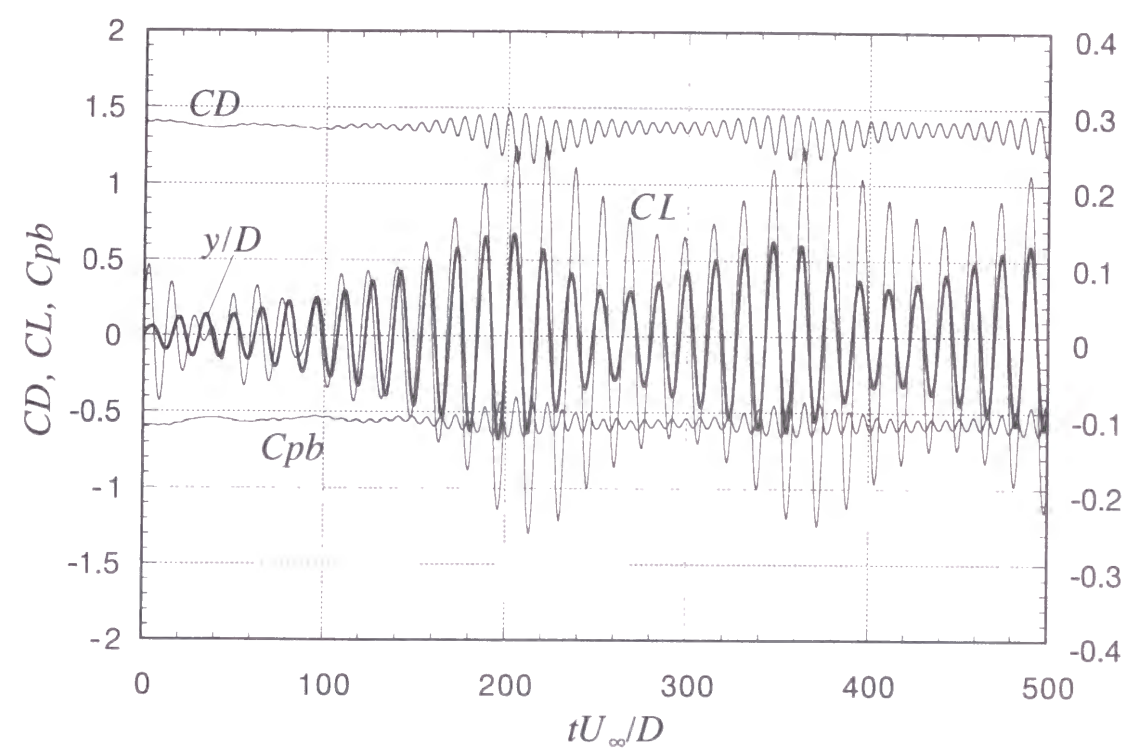


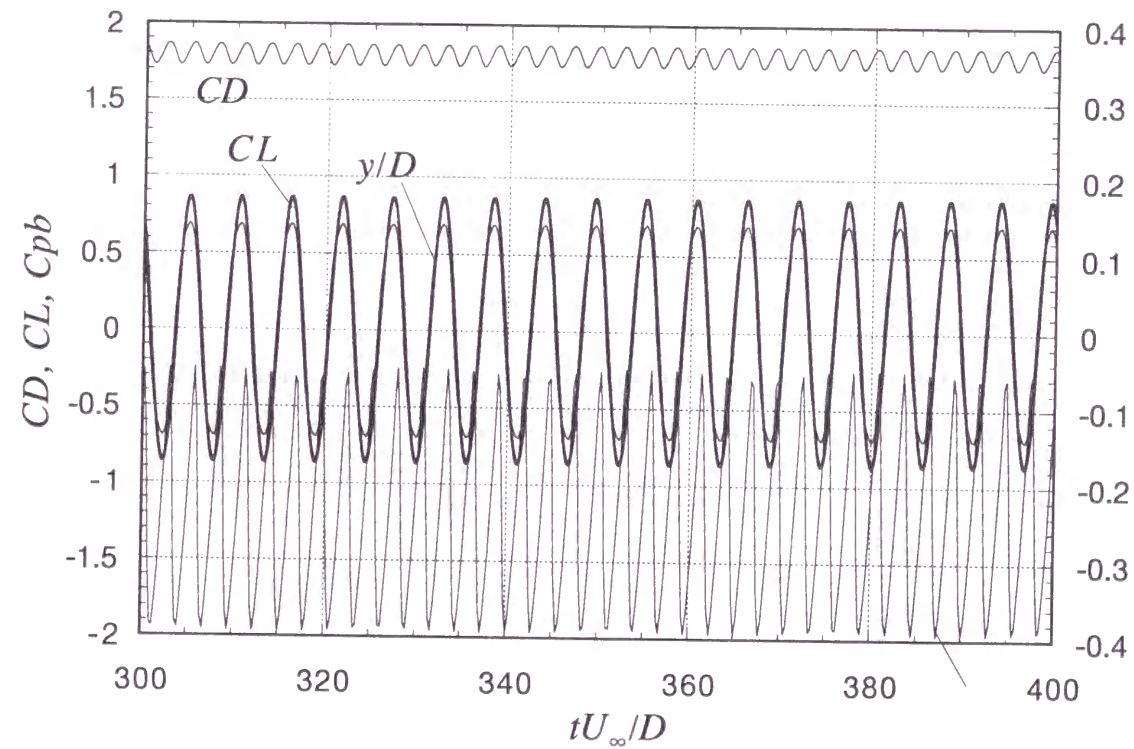
図 5. 5 無次元風速による渦度場の変化 (最大振幅時)



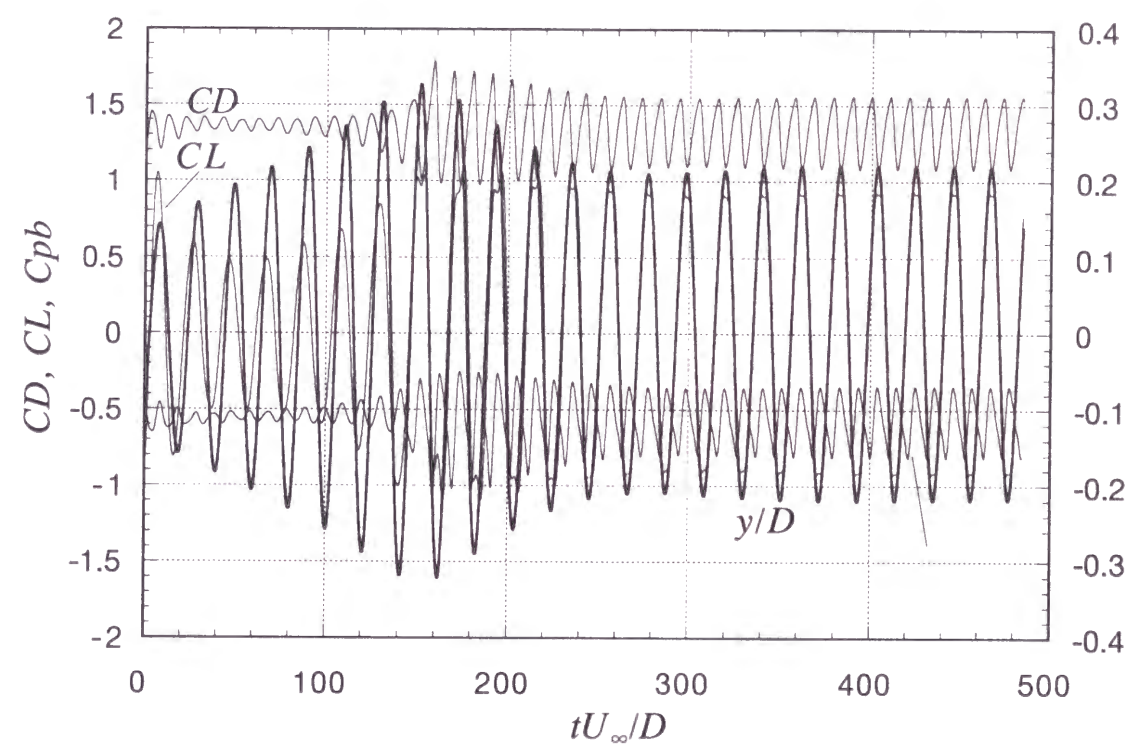
(a)  $Ur=4.0$



(c)  $Ur=15.0$



(b)  $Ur=5.5$



(d)  $Ur=20.0$

図 5. 6 振動振幅, 抗力係数, 揚力係数の変動

図 5. 6 振動振幅, 抗力係数, 揚力係数の変動



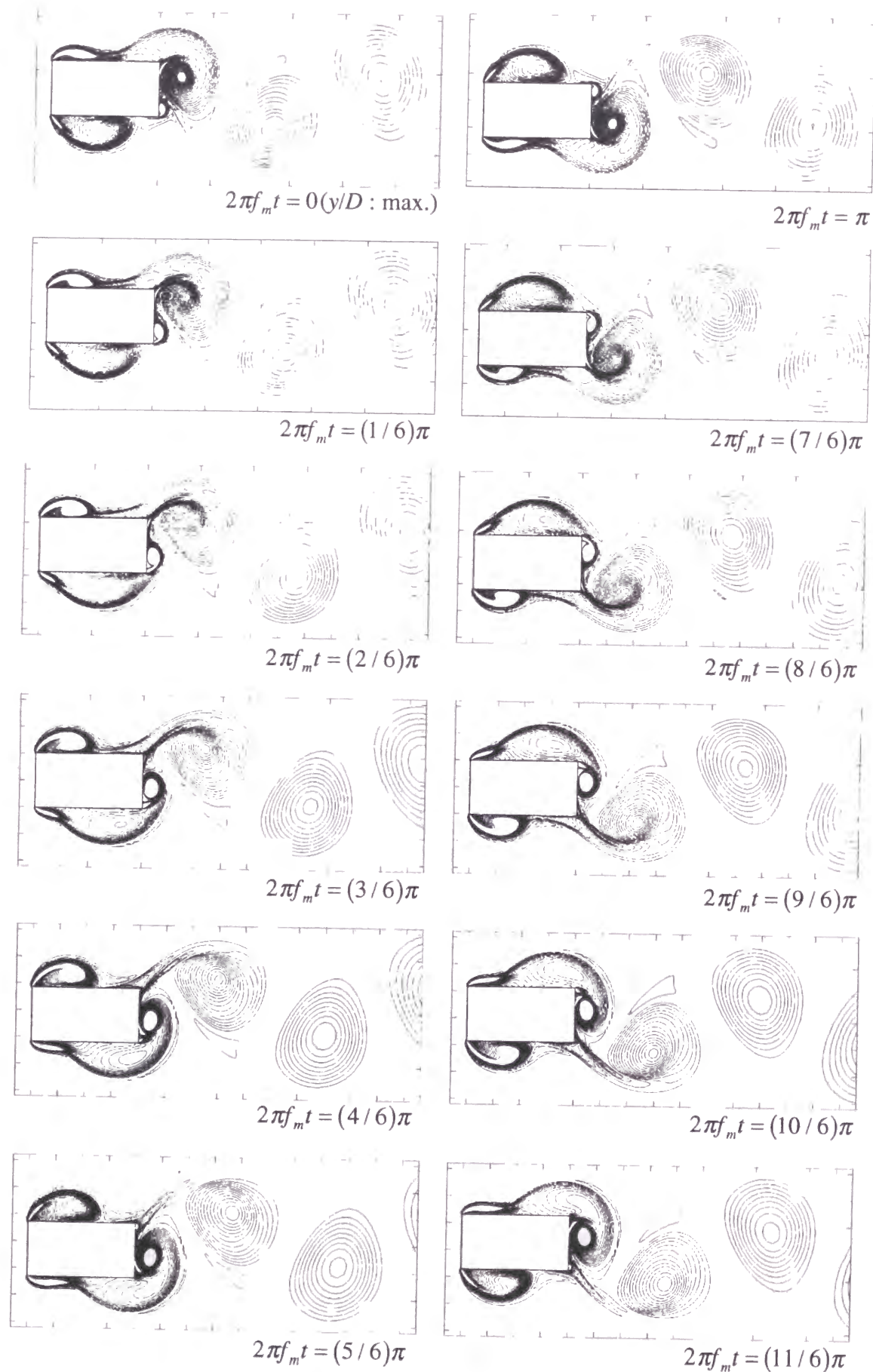


図5.7  $B/D=2$ 断面の渦励振 ( $Ur=5.5$ ) 時における振動1周期間の渦度の変化

結果<sup>3)</sup>にもこの領域では振幅が変動する様子が示されている。 $Ur=20$ では応答はさらに大きくなる。しかしこのときの揚力波形を見ると(図5.5(d))変位にlock-inしている。したがって $Ur=20$ でも渦励振の状態にあるとも考えられる。また本解析ではScruton数が小さいため、渦励振はそのままギャロピングに移行しているとも考えられる。このとき振動波形は正弦波状となっている(図5.5(d))。ギャロピング時では自己励起型渦励振時とは異なり、側面上での前縁はく離渦の強い巻き込みはなく、はく離せん断層の揺動が空気力生成にとって重要になっていることがわかる(図5.4(d,e))。

### 5.3.3 周期的再付着型断面の応答

$3 \leq B/D \leq 6$ の矩形断面は周期的再付着型断面に属する。この断面では $Ur=0.83(B/D)$ および $1.67(B/D)$ に相当する風速で1せん断層不安定型(自己励起型)の渦励振が生じる<sup>7)</sup>。以下、本節では周期的再付着型断面を代表して $B/D=4$ 断面に関して詳しく調べる。

図5.7には並進1自由弾性支持された本自由振動実験により得られた $B/D=3, 4, 5$ の断面について $Sc=3$ のときのV-A図を示す。無次元風速の定義を見付け幅 $D$ ではなく流れ方向の長さ $B$ をとるとこれらの現象はよく説明でき、それぞれの応答の開始無次元風速は $U_{\infty}/(n_0 B)=0.83$ および $1.67$ となる。 $1.67$ に開始風速をおくピークは $B/D$ が大きくなるにつれ小さくなるが、一方 $0.83$ に開始風速をもつピークは $B/D$ が大きくなるにつれ大きくなっている。さらに、 $B/D=3$ では見られないが、 $B/D=4$ および $5$ ではさらに低い無次元風速 $0.4$ 附近にも励振が見られる。辺長比が増大するにつれ高無次元風速側の渦励振は次第に小さくなり、順次低無次元風速側にシフトする様子が伺われる。流れ方向長さで整理できることから周期的再付着型断面の渦励振はedge-toneとしての解釈もなされている<sup>8)</sup>。なおいずれの断面でも $U_{\infty}/n_0 B > 3$ では励振は見られなかった。

### 5.3.4 $B/D=4$ 断面の強制加振時の非定常空気力

図5.8には強制加振時(加振振幅 $0.02D$ )における非定常空気力の解析結果と既往の実験結果<sup>3,4)</sup>の比較を示す。図5.8(b)では $Ur=U_{\infty}/n_0 D=4$ 付近および $Ur=7$ 付近で非定常空気力の速度同相成分は $CL_f > 0$ となっている。これは自由振動実験結果において示した応答が立ち上がる無次元風速 $U_{\infty}/n_0 B=0.83$ および $1.67$ に対応している。解析結果は既往の実験結果に比較して $CL_f$ がピークを示す部分および $CL_f$ の低無次元風速部分が大きめの値を与えているが、位相差も含めて全体的な傾向や特に $Ur > 8$ の高無次元風速域では実験結果によく一致している。

図5.9には強制加振時の空気力の時系列波形および流れのパターンを示す。 $Ur=5$ までは側面上に渦の強い巻き込みが見られる。揚力の時系列を見ると $Ur=8$ までは加振振動数成分のみである。 $Ur=9, Ur=10$ ではビートが見られるようになる。さらに高無次元風速域においては



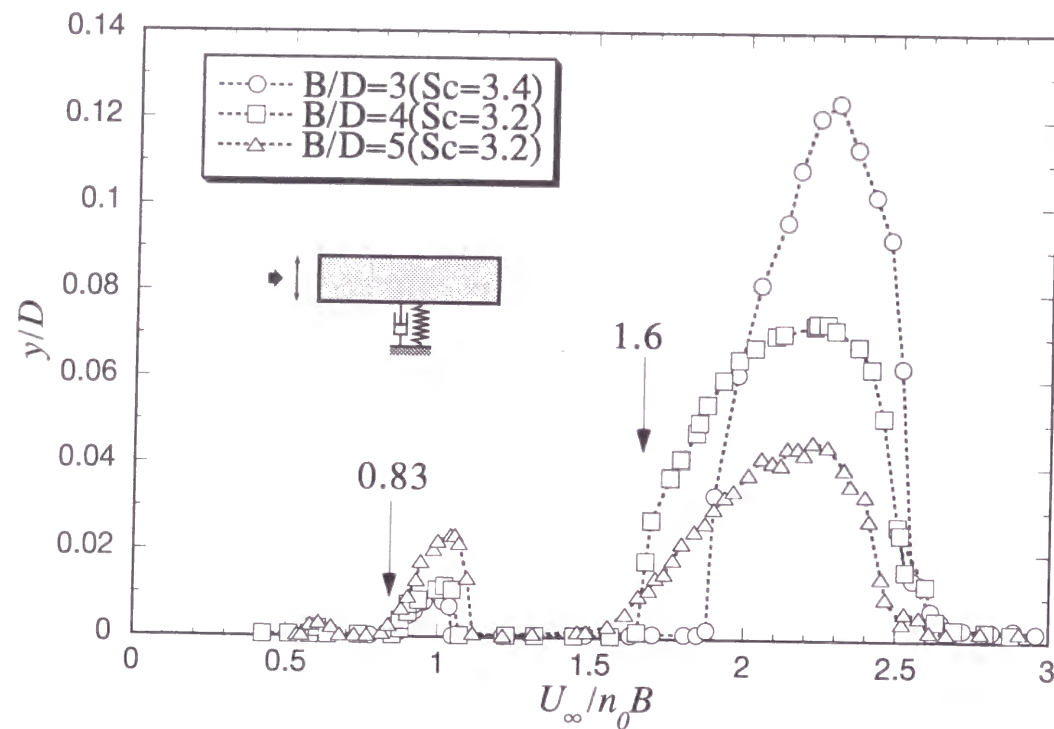
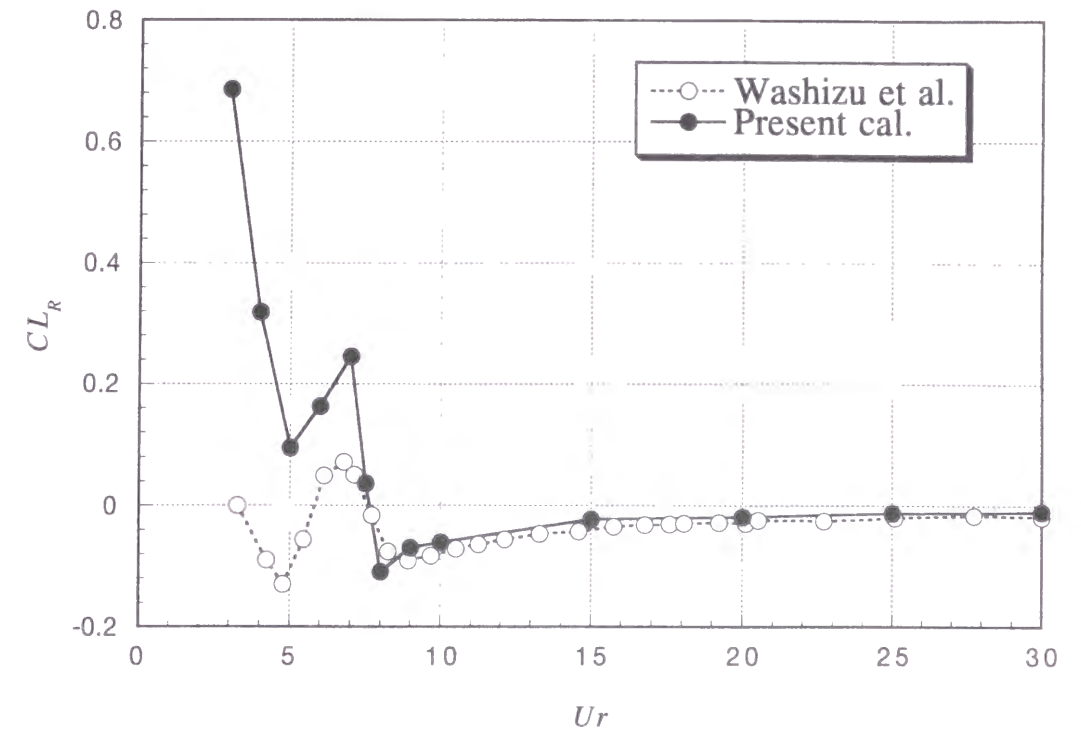


図5. 8 周期的再付着型の1せん断層不安定型（自己励起型）渦励振

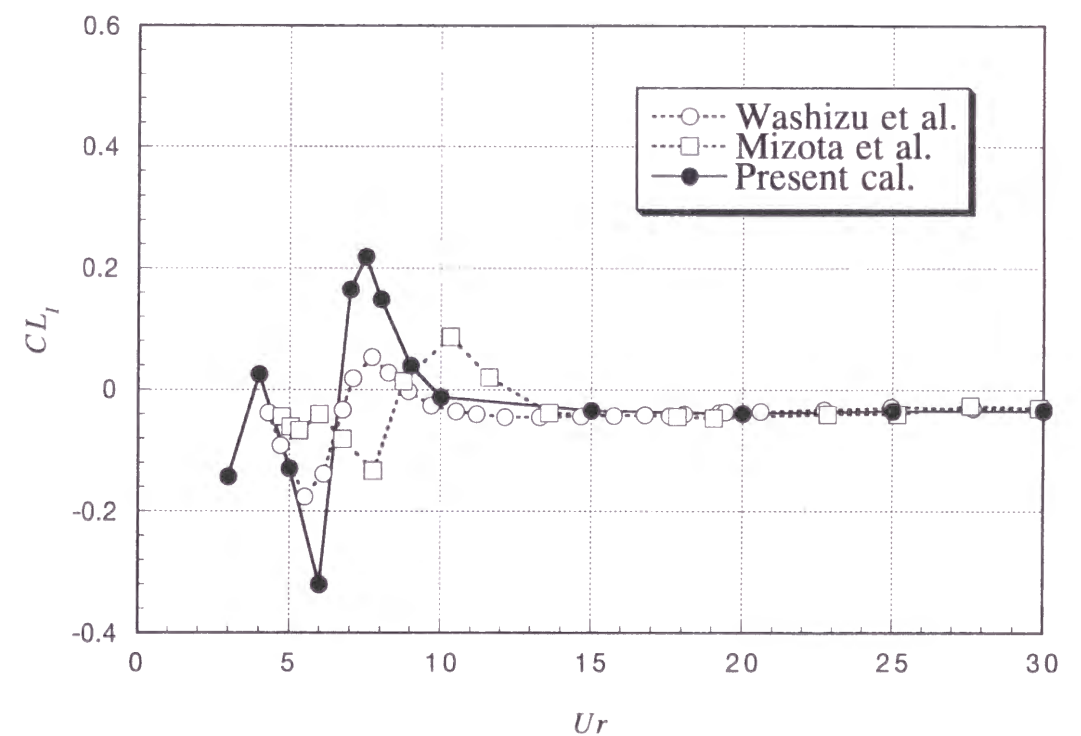
Karman 渦放出成分が卓越して見られる。

図5. 10には側面上の非定常風圧分布を示す。同図(a)の速度同相成分  $C_{p_i}$  を見ると、 $Ur=4$  および  $Ur=8$  の場合について  $C_{p_i} > 0$  となる部分、すなわち風圧力が励振元となる部分があることが認められる。ただし  $Ur=4$  では  $C_{p_i} < 0$  となる部分とのキャンセルにより励振力としては  $Ur=8$  に比べて小さい。一方、 $Ur=30$  では側面ほぼ全ての部分が  $C_{p_i} < 0$  となっており、励振力となる部分が存在していない。同図(b)には非定常風圧の変位との位相差の側面上の分布を示す。渦励振を生じている  $Ur=4$  と  $Ur=8$  では、前縁と後縁の位相差は概ね  $630^\circ$ 、 $300^\circ$  で、渦が側面上を流下するのにそれぞれ概ね断面の振動1.7周期、0.8周期を要している。強制加振時の流れ場を見ると、図5. 9の  $Ur=4.0$  の場合は他の無次元風速とは異なり、断面前縁部において形成された渦が小さく巻き込んだ渦となり側面を流下している。

図5. 11には加振振幅が大きい場合 ( $y/D=0.1$ ) を示す。この場合、実験では無次元風速の全領域で  $CL_i$  は負になっている。本解析結果ではその傾向もとらえられており、 $CL_i$  については実験値と全体的な一致はよい。小振幅時の  $Ur < 7$  の低無次元風速において本解析により得られた  $CL_R$  は大き目に評価されたが、加振振幅が大きい場合ではその傾向がより無次元風速が高い領域にまで及び、 $Ur < 15$  で実験値との差が目立つ。

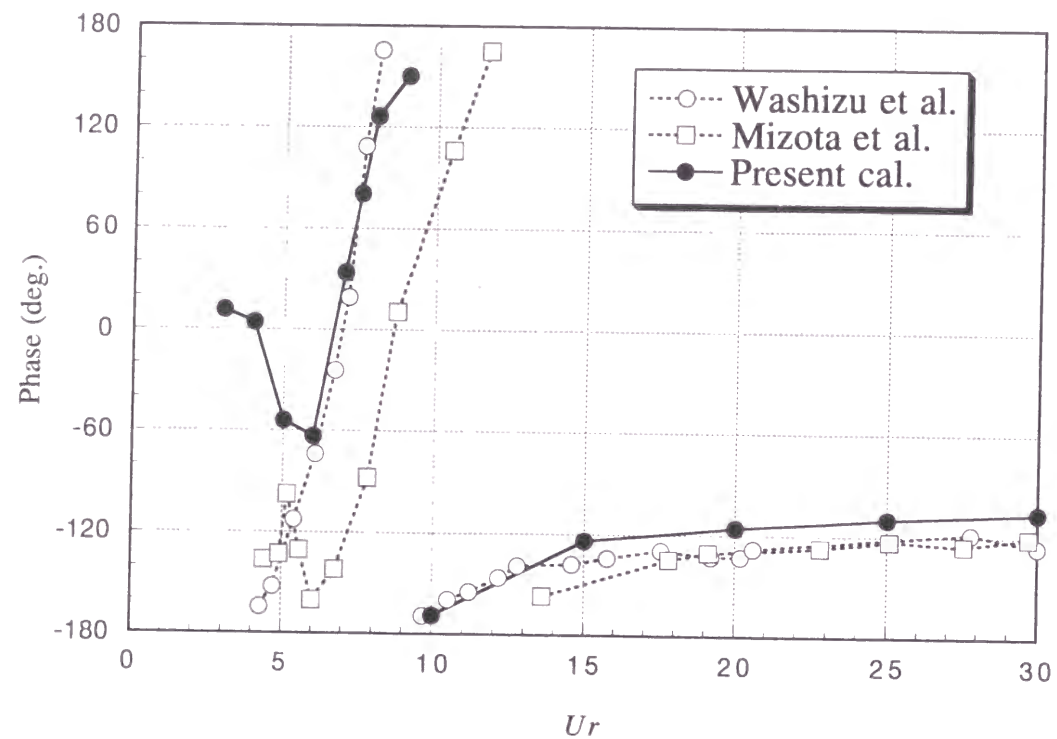


(a) 変位同相成分

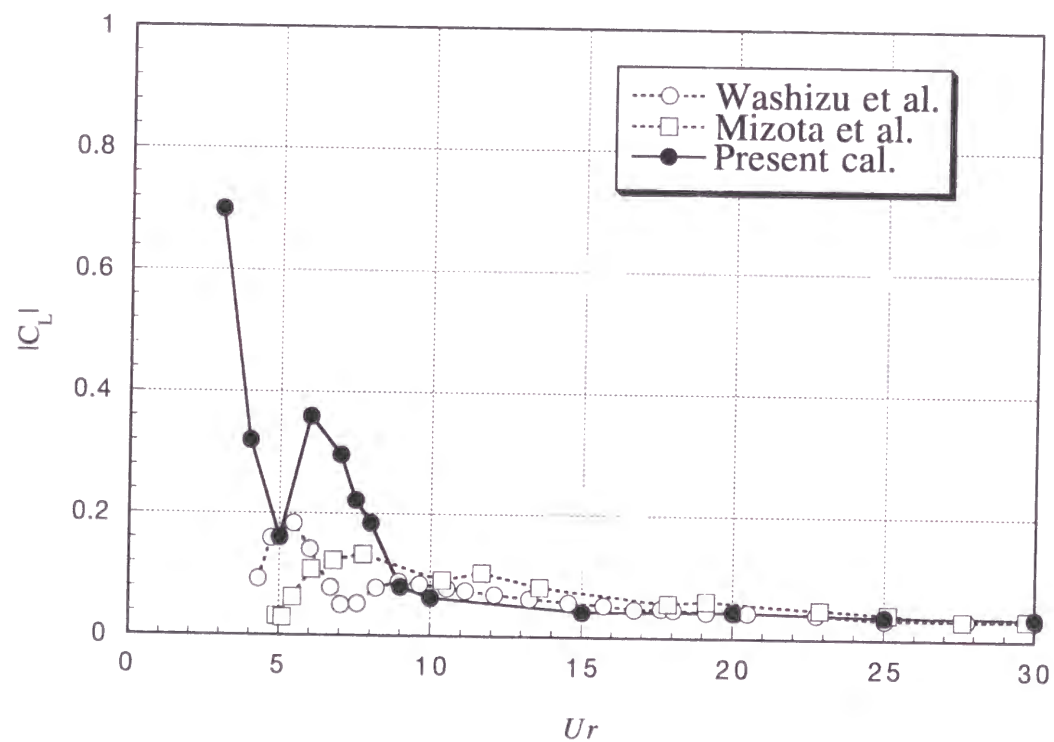


(b) 速度同相成分

図5. 9  $B/D=4.0$  並進強制加振時（加振振幅  $0.02D$ ）の非定常空気力係数



(c)Phase



(d)絶対値

図5.9  $B/D=4.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.02D$ ) の非定常空気力係数

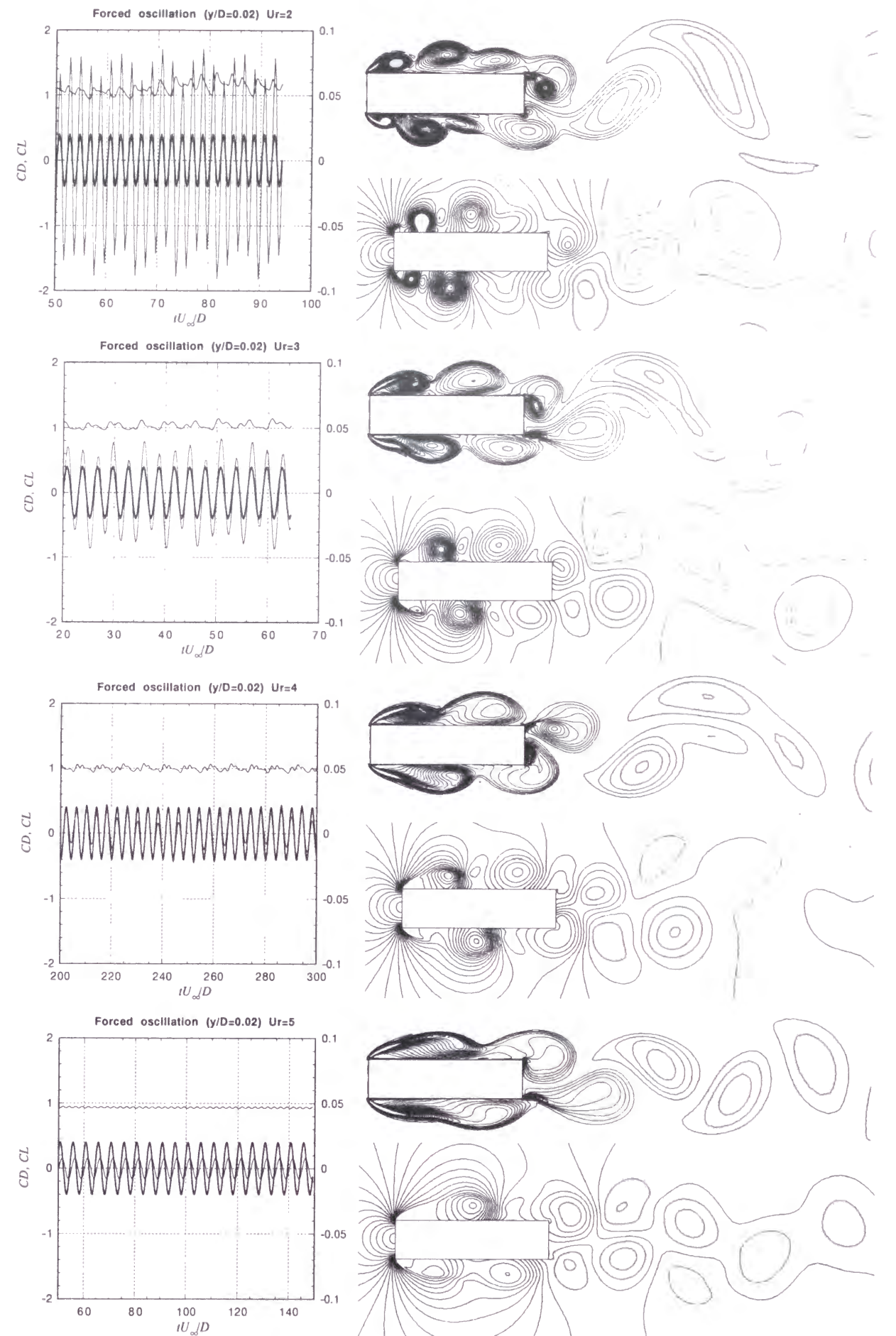


図5.10  $B/D=4.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.02D$ ) の渦度、圧力、空気力の時系列



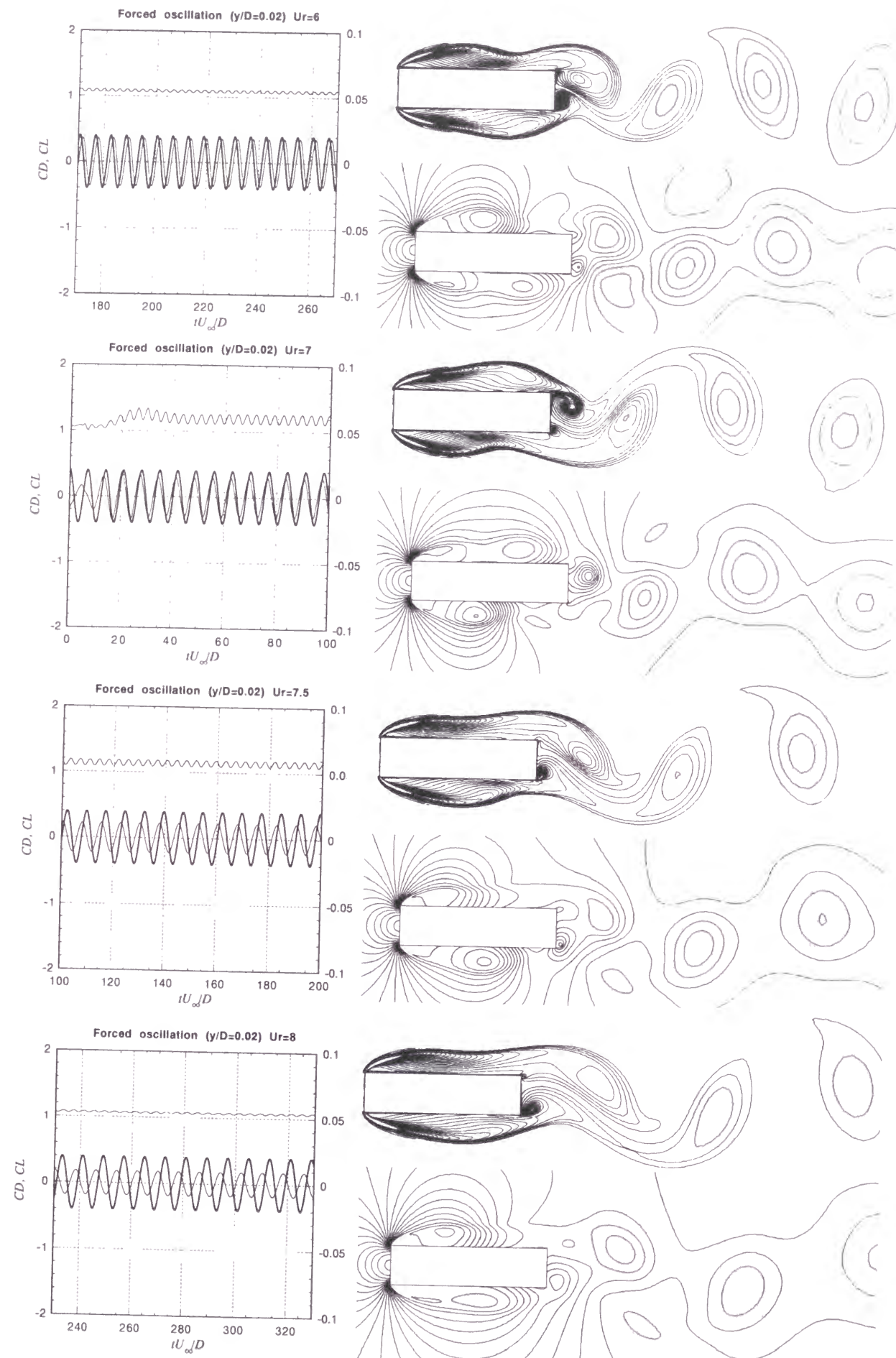


図 5. 1 0  $B/D=4.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.02D$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列

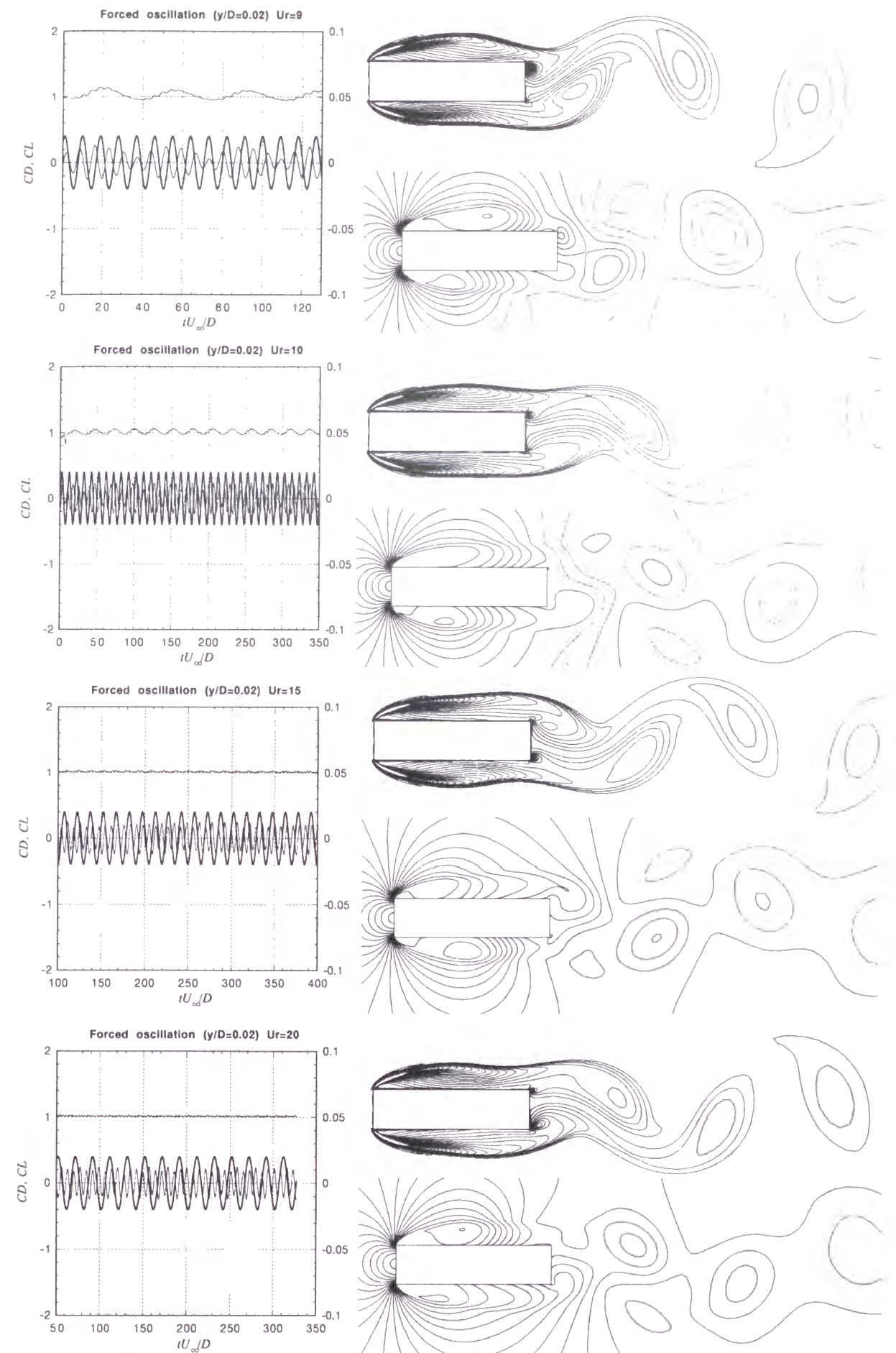


図 5. 1 0  $B/D=4.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.02D$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列



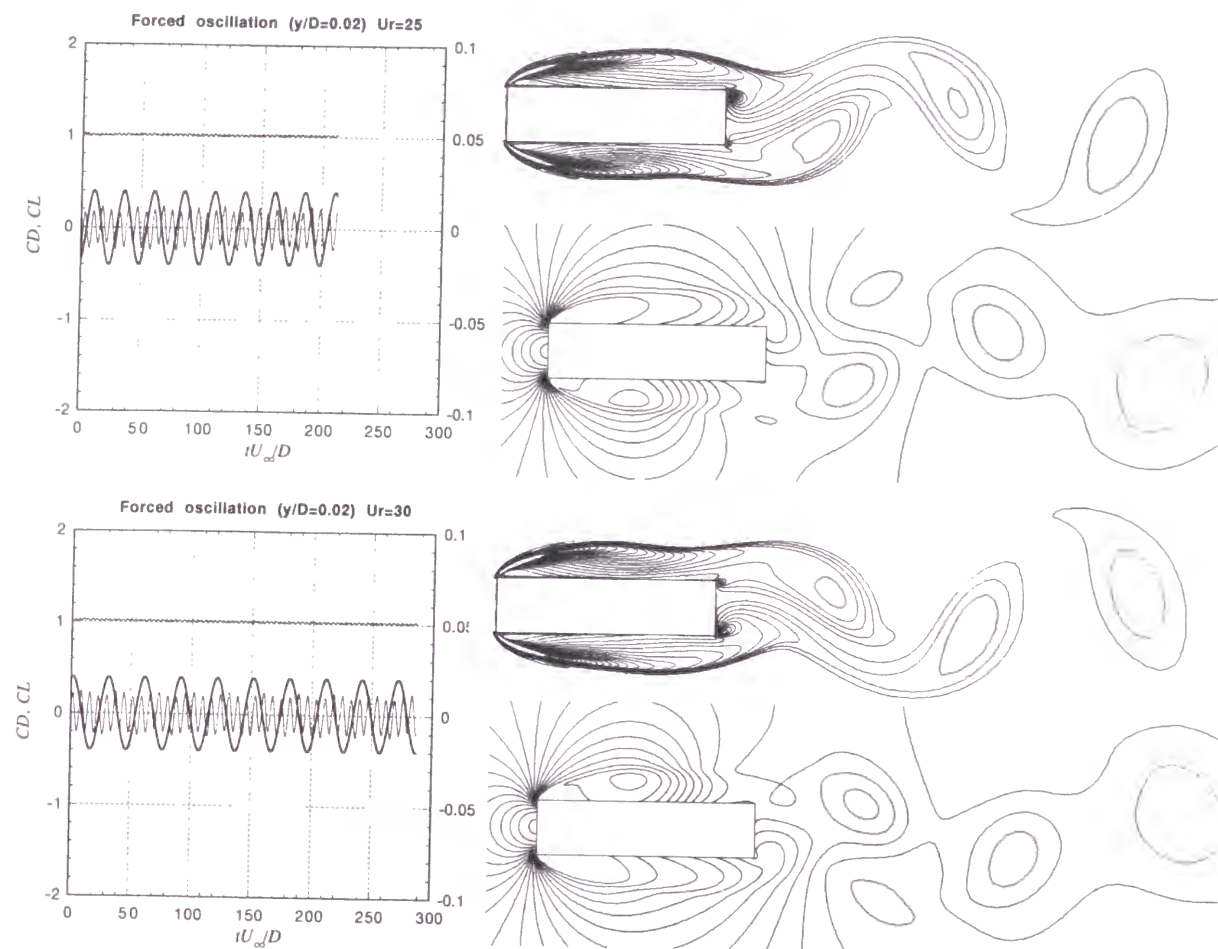
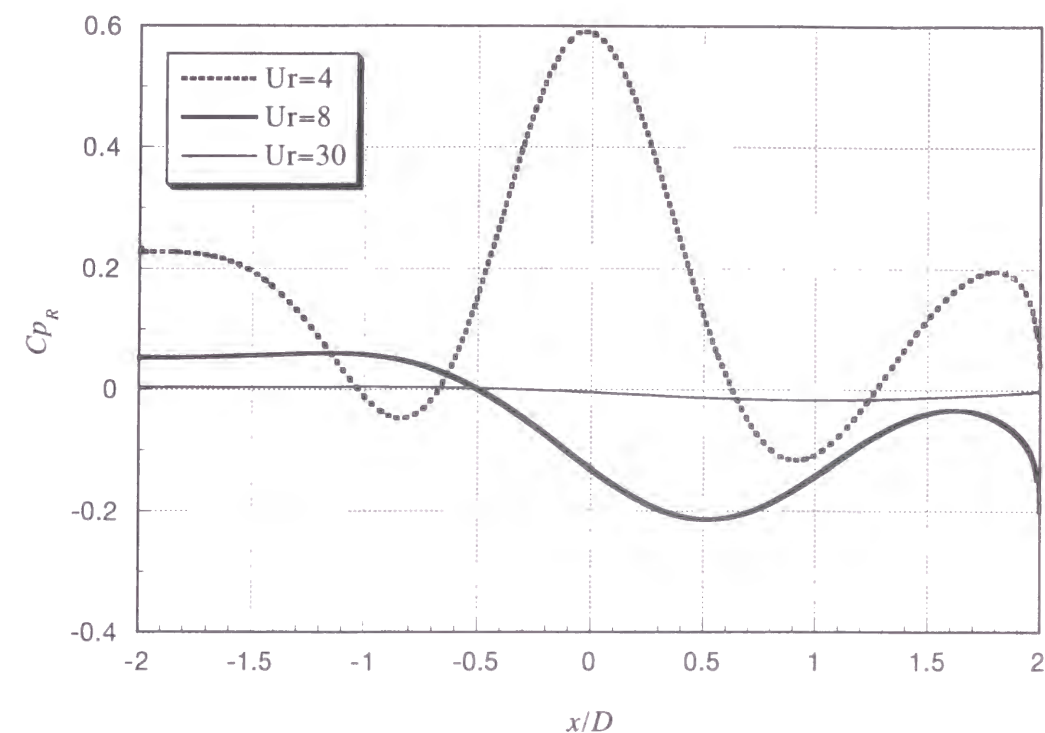


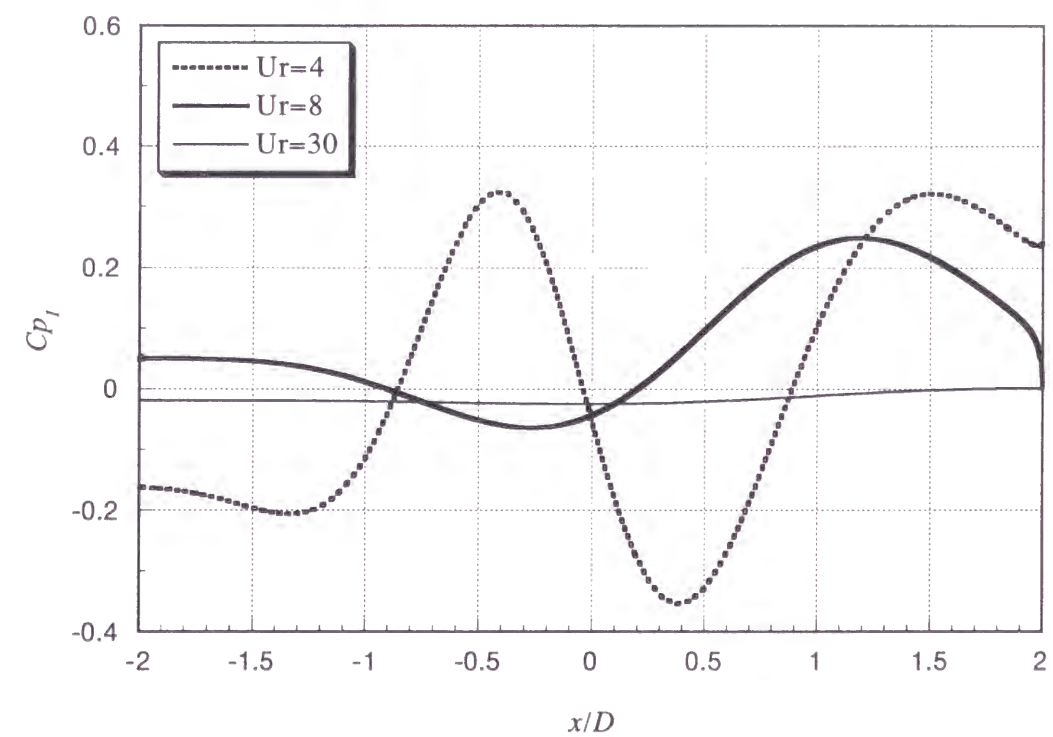
図5.10  $B/D=4.0$  並進強制加振時（加振振幅  $0.02D$ ）の渦度、圧力、空気力の時系列

$Ur=8$  に比べて小さい。一方、 $Ur=30$  では側面ほぼ全ての部分が  $C_{p_i} < 0$  となっており、励振力となる部分が存在していない。同図(b)には非定常風圧の変位との位相差の側面上の分布を示す。渦励振を生じている  $Ur=4$  と  $Ur=8$  では、前縁と後縁の位相差は概ね  $630^\circ$ 、 $300^\circ$  で、渦が側面上を流下するのにそれぞれ概ね断面の振動1.7周期、0.8周期を要している。強制加振時の流れ場を見ると、図5.9の  $Ur=4.0$  の場合は他の無次元風速とは異なり、断面前縁部において形成された渦が小さく巻き込んだ渦となり側面を流下している。

図5.11には加振振幅が大きい場合 ( $y/D=0.1$ ) を示す。この場合、実験では無次元風速の全領域で  $CL_i$  は負になっている。本解析結果ではその傾向もとらえられており、 $CL_i$  については実験値と全体的な一致はよい。小振幅時の  $Ur < 7$  の低無次元風速において本解析により得られた  $CL_R$  は大き目に評価されたが、加振振幅が大きい場合ではその傾向がより無次元風速が高い領域にまで及び、 $Ur < 15$  で実験値との差が目立つ。

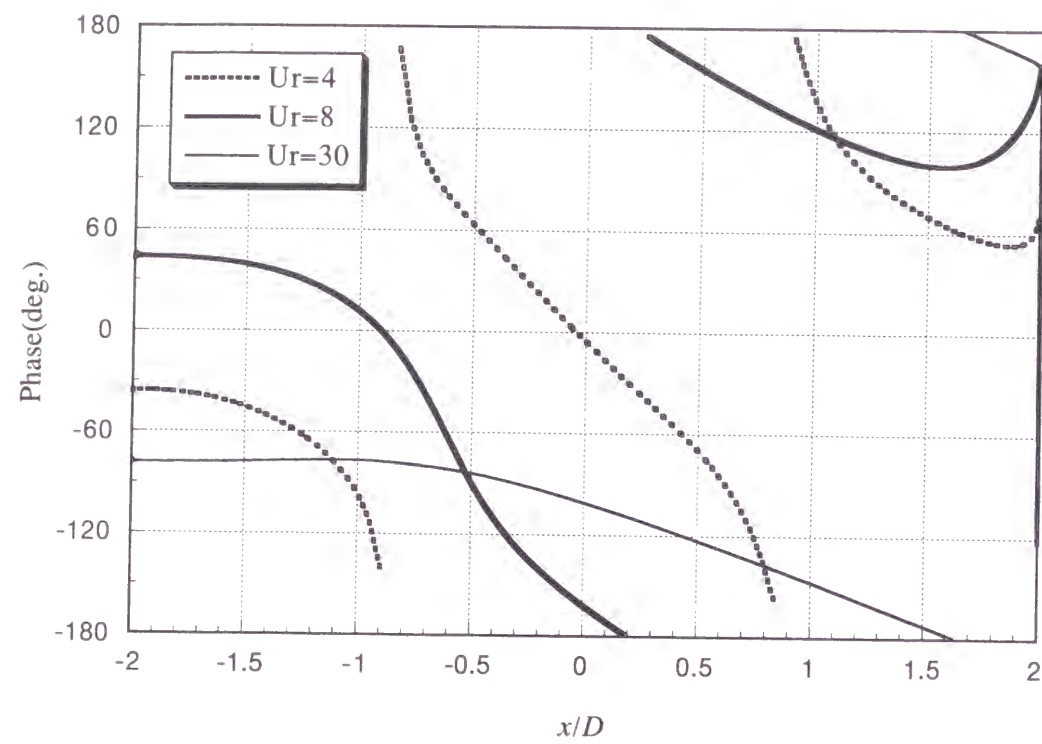


(a)  $C_{p_R}$

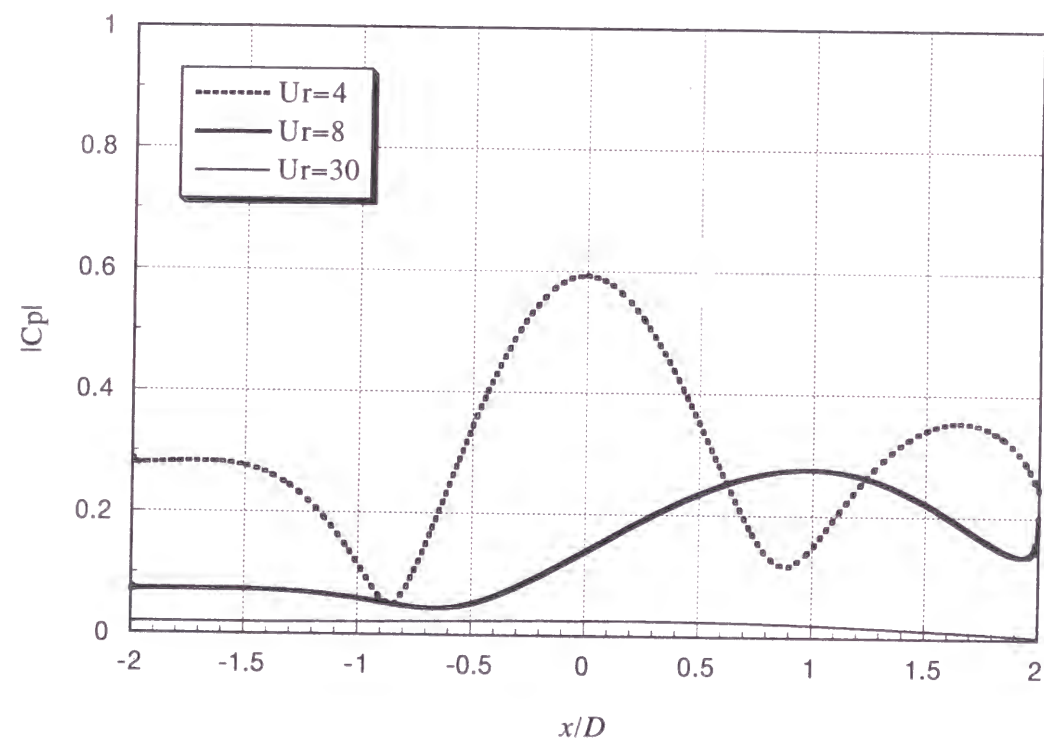


(b)  $C_{p_I}$

図5.11  $B/D=4.0$  の強制振動時（加振振幅  $0.02D$ ）における非定常風圧力の解析結果

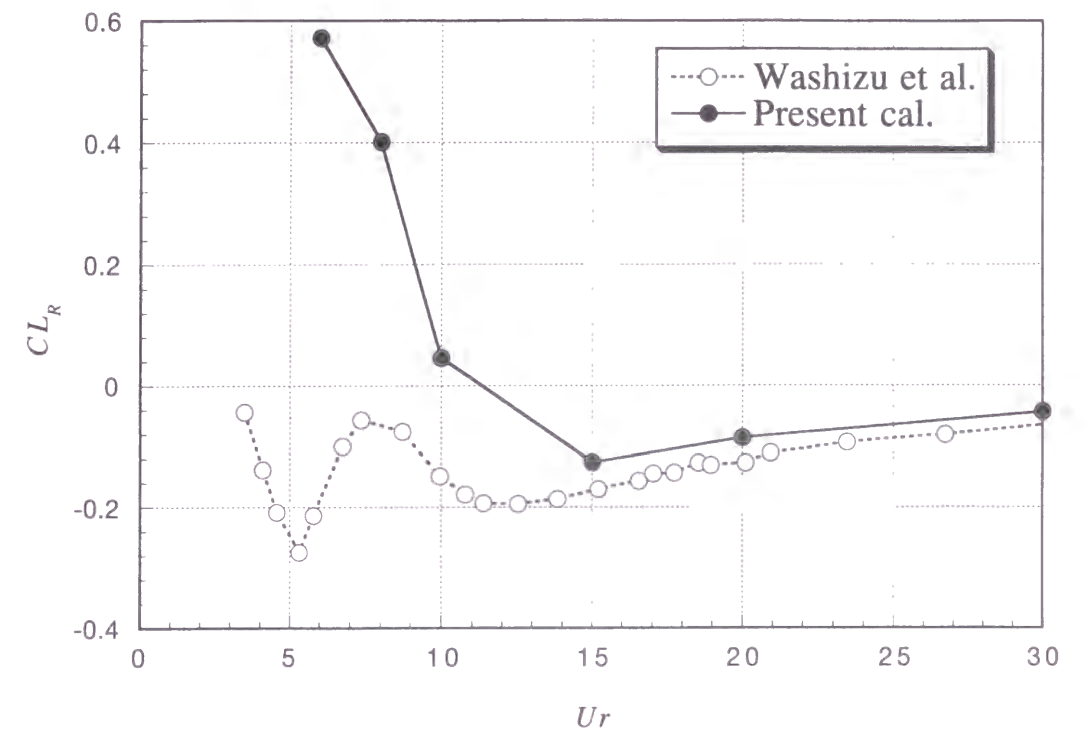


(c)Phase

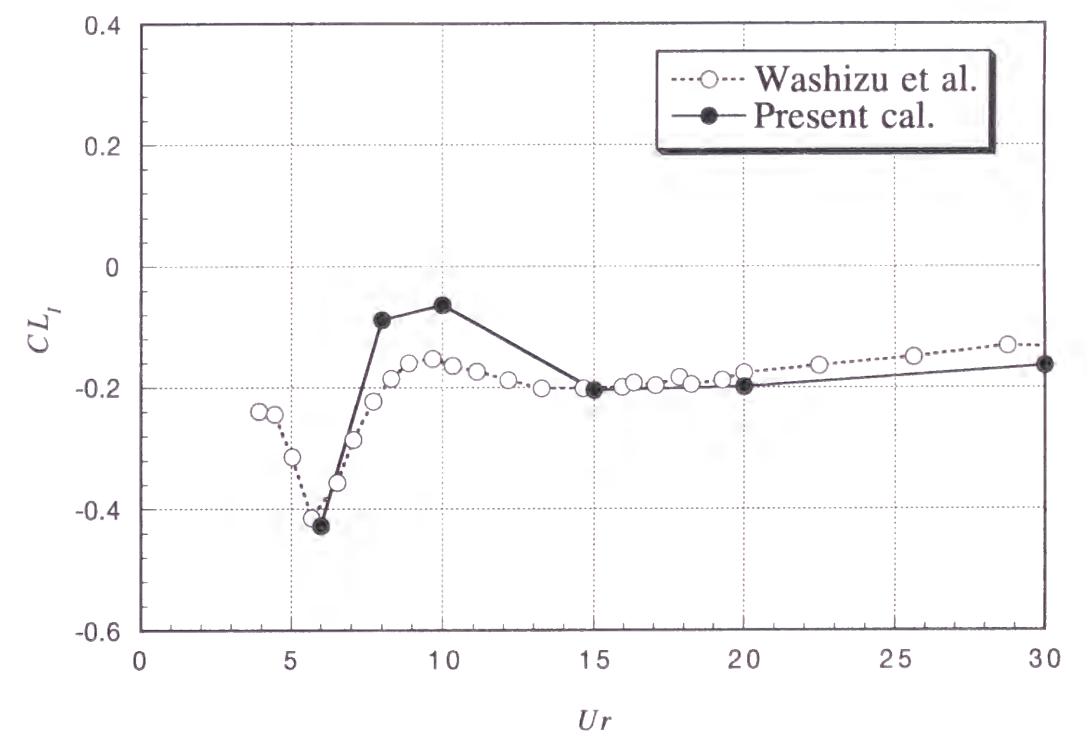


(d) $|Cp|$

図 5. 1 1  $B/D=4.0$  の強制振動時 (加振振幅  $0.02D$ ) における非定常風圧力の解析結果

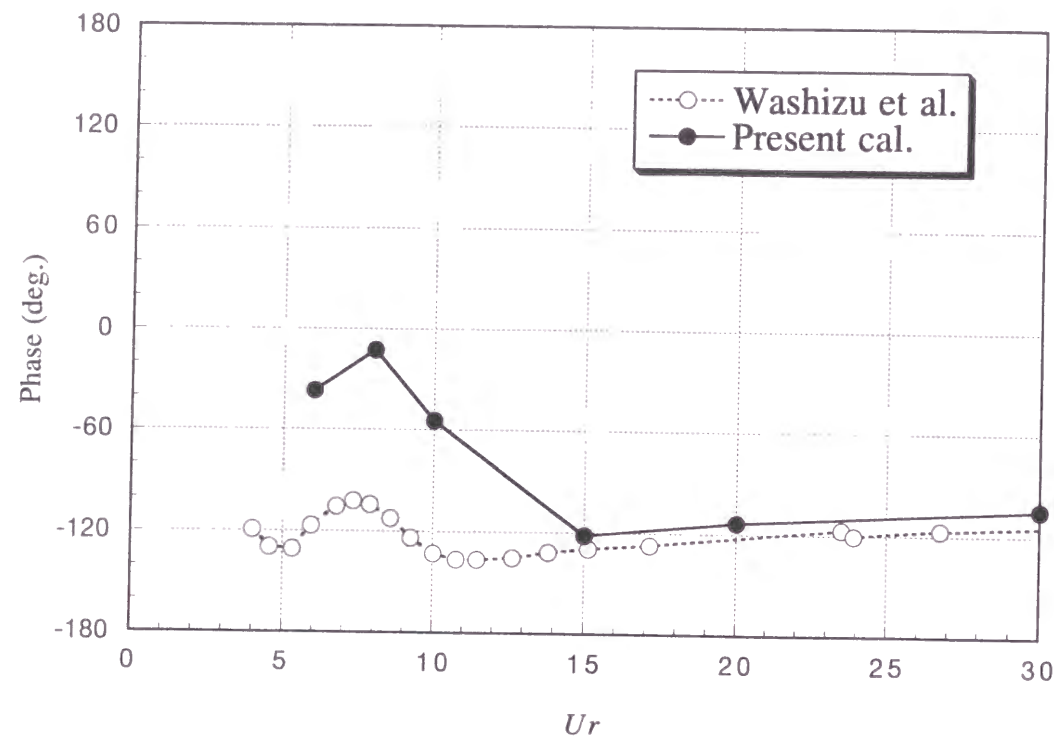


(a)変位同相成分

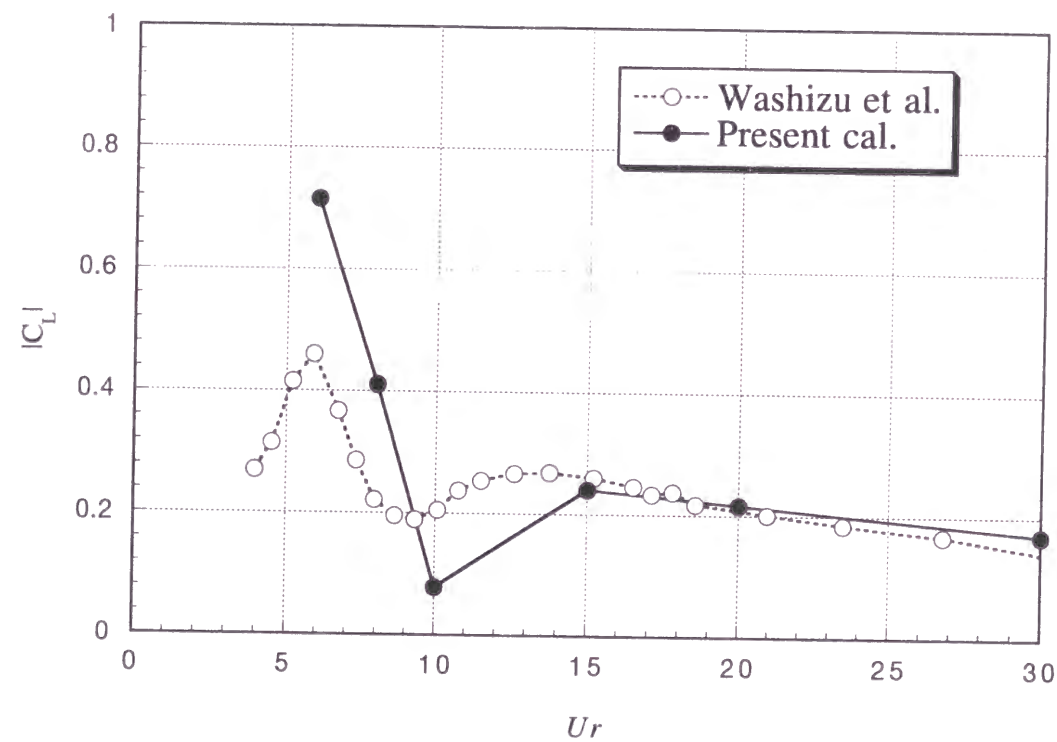


(b)速度同相成分

図 5. 1 2  $B/D=4.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の非定常空気力係



(c)Phase



(d)絶対値

図5. 1.2  $B/D=4.0$  並進強制加振時 (加振振幅  $0.1D$ ) の非定常空気力係

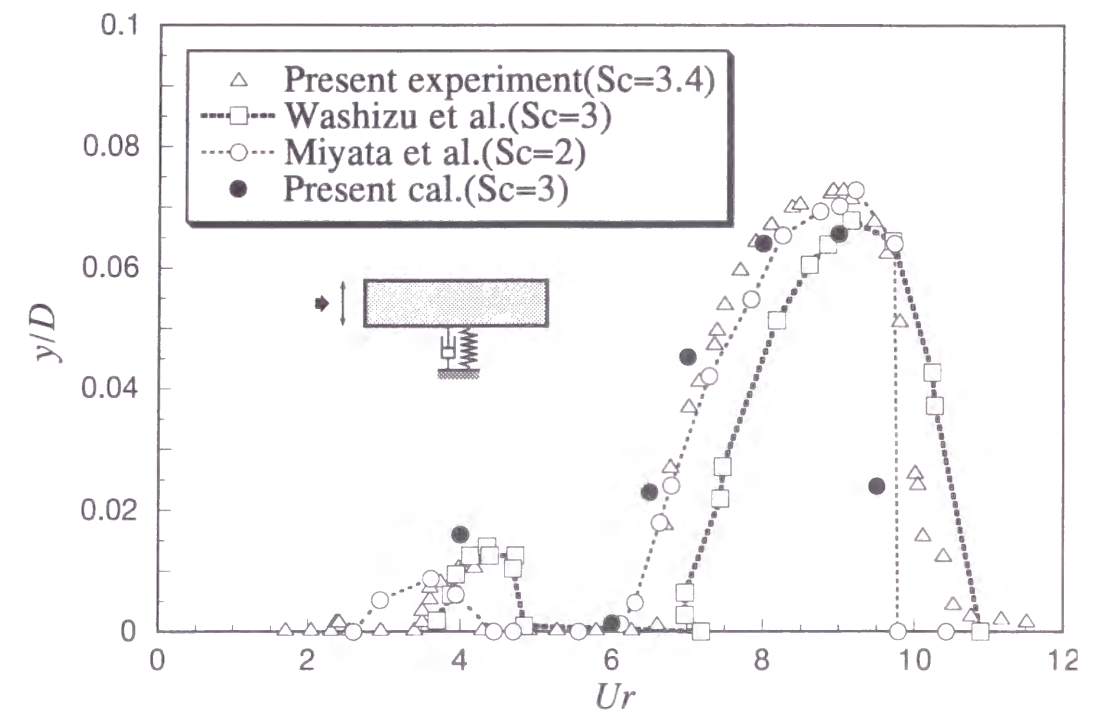


図5. 1.3  $B/D=4.0$  並進自由振動時における解析結果と実験結果の比較

### 5. 3. 5 並進1自由度弾性支持された $B/D=4$ 断面の解析

図5. 1.2には $B/D=4.0$ 並進自由振動時における解析結果と本実験結果および既往の実験結果<sup>3,11)</sup>の比較を示す。V-A図には強制加振時の速度同相成分に対応して $Ur=4$ と $Ur=7$ 附近に発振風速をもつ応答の励起が見られる。これらは $Ur=0.83(B/D)$ および $Ur=1.67(B/D)$ に対応する開始風速をもつ1せん断層不安定型の渦励振である。 $Ur>11$ では1自由度の並進では振動は発現しない。これは強制加振の速度同相成分がこの領域では負値を示すことと対応する。解析結果は実験結果とよく対応している。



## 5. 4 結論

本章では $k-\epsilon$ モデルの並進1自由度振動への適用性について論じた。 $B/D=2.0$ および $B/D=4.0$ の矩形断面に関して強制加振の解析を行い既往の実験結果と比較し、振動時空気力の再現性を検討した。さらに自由振動の解析と実験を行い、比較を行った。その結果は以下に示すとおりである。

(1) 解析による $B/D=2$ 断面の非定常空気力は既往の実験結果と極めてよい一致を示した。

(2) 質量減衰比が小さい場合についての $B/D=2$ 断面の自由振動解析を行い、既往の風洞実験結果と比較した。その結果、 $Ur=5.5$ 付近に1せん断層不安定型の渦励振が再現され、また $Ur=12$ 付近からKarman渦励振が立ち上がりそのままギャロピングへ移行する過程が再現され、定量的に極めてよい一致を示した。

(3) 解析による $B/D=4$ 断面の非定常空気力は既往の実験結果と比較してやや大きめな値を示したが $Ur=4$ および $Ur=7.5$ 付近に $CL_l$ がピークを有する点や $Ur>10$ の高無次元風速域で $CL_l$ が負になる点に関してはよい一致を示した。

(4)  $B/D=4$ 断面の解析では $Ur=4$ および $Ur=8$ 付近にピークを有する1せん断層不安定型の2つの渦励振が再現された。

以上の結果を通して並進振動に特徴的である1せん断層不安定型渦励振と、ギャロピングが再現されたことで本解析法は扁平な矩形断面のはく離渦に伴う振動予測に適用が可能であることがわかった。

静止状態においては変動風圧係数は小さく評価された。これは第3章においても述べたように $k-\epsilon$ モデルや応力方程式モデルのようなRANS系の乱流モデルを用いた手法では圧力変動をperiodic成分でしか表現できないためである。第3章の実験結果と解析結果の比較からは、実際の現象において静止断面に作用する変動風圧におけるstochastic成分の割合が無視できないことを示しているものといえる。この点を踏まえた上で、本章では $k-\epsilon$ モデルの振動問題への適用を試みた。振動問題は非定常な問題であり、励振力形成に風圧変動が重要になることはいうまでもないが、ここで得られた結果は既に示してきたように満足いく結果であり、風圧変動が正しく評価されたことを示している。これは静止状態において得られた知見とは相反するように見えるが、逆に、振動時における風圧変動では物体の運動に伴うperiodic成分が卓越しているということが本章で得られた結果から結論づけることができる。したがってこのような振動問題に対してはRANSモデルの欠点であるstochastic成分評価の欠除は問題とはならないといえる。むしろ振動問題へのRANSモデルの適用性は、変動中のperiodicalな成分を抽出するというアンサンブル平均型モデル本来のありかたに沿った理にかなった用い方であると考えられる。

## 参考文献

- 1) 加藤真志：修正生産項 $k-\epsilon$ モデルを用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析，土木学会論文集，No.577，I-41，p.217-230，1997.10
- 2) 田村哲郎，伊藤嘉晃：動力学特性値の変化による空力不安定振動の応答評価，日本建築学会構造系論文集，第504号，p.15-21，1998.2
- 3) Washizu, K., Ohya, A. : Otsuki, Y. and Fuji, K. : Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode, *J. of Sound and Vibration*, 59(2), p.195-210, 1978
- 4) 溝田武人，中村泰治：矩形断面柱の非定常揚力と後流の速度変動について，構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム，p.201-208，1974.12
- 5) Takeda, K. and Kato, M. : Wind tunnel blockage effects on drag coefficient and wind-induced vibration, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 42, p.897-908，1992
- 6) 宮崎正男：箱桁断面の空力不安定振動の抑制，第7回風工学シンポジウム論文集，p.187-194，1982
- 7) 白石成人，松本勝：重腹構造断面の渦励振応答特性に関する研究，土木学会論文報告集，第322号，p.37-50，1982.6
- 8) Nakamura, Y., Nakashima, : Vortex Excitation of Prisms with Elongated Rectangular H and  $\perp$  Cross Section, M., *J. Fluid Mech.* (1986), vol.163, 149 - 169.
- 9) Tamura, T. and Itoh, Y. : Three-dimensional vortical flows around a bluff cylinder in unstable oscillations, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 67&68, p.141-154, 1997
- 10) 嶋田健司：扁平矩形断面柱の渦励振の数値解析，日本機械学会論文集(C編)，第61巻，585号，p.22-29，1995.5
- 11) Miyata, T., Miyazaki, M. and Yamada, H. : Pressure distribution for wind induced vibration of box girder bridge, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 14, p.419-430, 1983
- 12) 嶋田健司，孟岩：矩形断面柱の空力特性と $B/D=2$ 断面柱の空力弾性振動の $k-\epsilon$ モデルによる数値解析，第15回風工学シンポジウム論文集，1998，161-166
- 13) 嶋田健司，石原孟： $B/D=4$ 二次元矩形断面柱の渦励振の $k-\epsilon$ モデルによる数値解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，1999
- 14) Shimada, K., Ishihara, T., : Prediction of aeroelastic vibration of rectangular cylinders by  $k-\epsilon$  model, *Journal of Aerospace Engineering*, 12(4), p.122-135, 1999



## 第6章 ねじれ1自由度空力振動予測への適用性の検討

### 6.1 概要

本章では、はく離流れに起因する空力弾性振動のうちねじれ1自由度の振動現象について論じる。第5章では $k$ - $\varepsilon$ モデルの並進1自由度系の振動問題への適用性について論じた。その結果、励振力が正しく評価され、アンサンブル平均型モデルであるRANSモデルによる非定常性を有する現象への適用性が示された。斜張橋断面等の断面は周期的再付着型断面に属する場合が多いが、周期的再付着型断面では限定振動である渦励振とともに、比較的低い無次元風速で発散的なねじれフラッターが生じる。しかしねじれの振動現象、特にねじれフラッターの現象的解明は未だ十分になされている状況ではない。本章では前章に引き続き $k$ - $\varepsilon$ モデルによるねじれの振動現象の再現性の検討を行う。

空力振動の数値解析の定量的検証のためには減衰定数や質量比といった構造パラメータが明らかである必要がある。既往の研究ではそれらが必ずしも明記されているとはいえず、また無次元パラメータとしてそれらの積（Scruton数）のみで整理されていることも多い。そこで本研究では構造パラメータを明らかにした上で種々の辺長比の矩形断面に関してねじれ1自由度

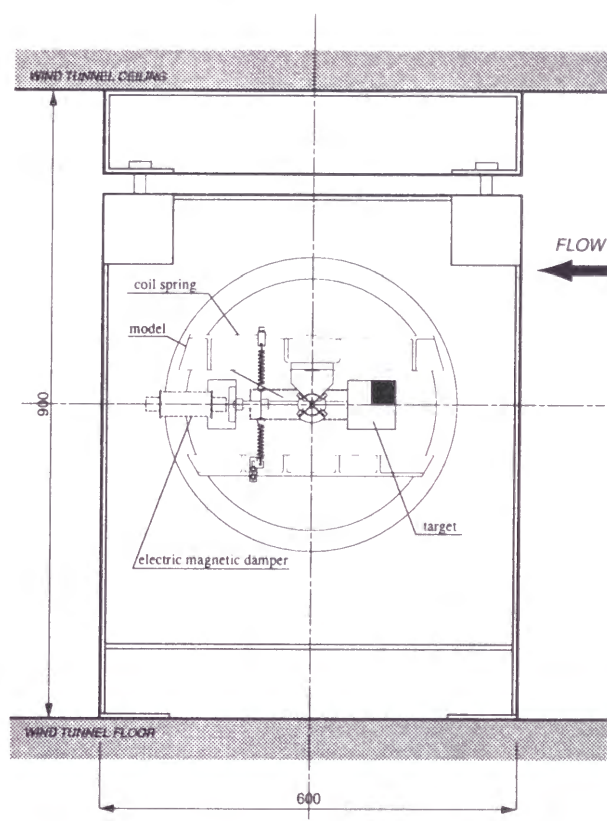


図6.1 ねじれ1自由度振動実験治具



の振動実験を行った。本章ではまず本風洞実験結果を示し、既往の風洞実験による研究結果との比較によって本実験の妥当性を示し、 $2.0 \leq B/D \leq 8.0$ の辺長比を有する矩形断面のねじれ渦励振およびねじれフラッターの発現風速および励振メカニズムに関して概観する。次にねじれ1自由度として比較的研究データが多い $B/D=2$ および $B/D=4$ 断面を例に、 $k-\varepsilon$ モデルによるこれらのねじれの振動現象の再現性に関して適用性の検証を行なう。

## 6.2 実験方法

図6.1には本実験で用いたねじれ1自由度の振動実験装置を示す。回転の自由度はクロススプリングによって与えた。また減衰は電磁ダンパーによって付与した。回転角変位の計測は光学式変位計により行ない、鉛直方向変位 $y$ を計測し、ターゲットと回転中心の距離 $L$ により $\theta = \tan^{-1}(y/L)$ として求めた。ねじれの応答はほとんどsinusoidalな変動を示したが、以後本章に示す図中の実験結果の振幅値はr.m.s.値を $\sqrt{2}$ 倍して示した。実験で使用した模型はバルサ製で両端にアルミ製の端板を付けている。

実験は可能なかぎり小さな慣性モーメントおよび減衰のもとで行った。表6.1には実験で使用した模型の構造特性を示す。

表6.1 実験模型の諸元

$B/D$	$B \times D \times H(\text{mm})$	$f_c(\text{Hz})$	$I(\text{kgfs}^2)$	$h(\%)$	$Sc(2I \delta / (\rho B^2 D^2))$
2	$40 \times 80 \times 300$	21.50	$1.73 \times 10^{-4}$	0.44-0.69	7.5-11.7 (0.05-0.1rad)
		18.75	$4.36 \times 10^{-4}$	0.36-0.47	15.4-20.1 (0.045-0.136rad)
		9.175	$1.06 \times 10^{-3}$	0.44-0.52	45.8-54.1
2.5	$40 \times 100 \times 300$	19.10	$2.31 \times 10^{-4}$	0.29-0.40	4.2-5.8 (MIO.P-2 $\times$ MIO.P)
3	$40 \times 120 \times 300$	18.72	$2.44 \times 10^{-4}$	0.31-0.38	3.3-4.0
3.3	$40 \times 132 \times 300$	18.15	$2.39 \times 10^{-4}$	0.36	3.1
3.5	$40 \times 140 \times 300$	18.25	$2.36 \times 10^{-4}$	0.28	2.1
4	$30 \times 120 \times 300$	19.15	$2.35 \times 10^{-4}$	0.24-0.63	4.4-11.5
5	$30 \times 150 \times 300$	18.12	$2.57 \times 10^{-4}$	0.35	4.4
6	$30 \times 180 \times 300$	11.10	$6.70 \times 10^{-4}$	0.25-0.37	5.7-8.5
8	$30 \times 240 \times 300$	10.35	$7.86 \times 10^{-4}$	0.44	6.7
2	スプリッター板	21.44	$1.70 \times 10^{-4}$	0.36-0.44	6.0-7.3 (0.05-0.1rad)
3.3	スプリッター板	19.40	$2.68 \times 10^{-4}$	0.33-0.52	3.2-5.0 (0.04-0.11rad)

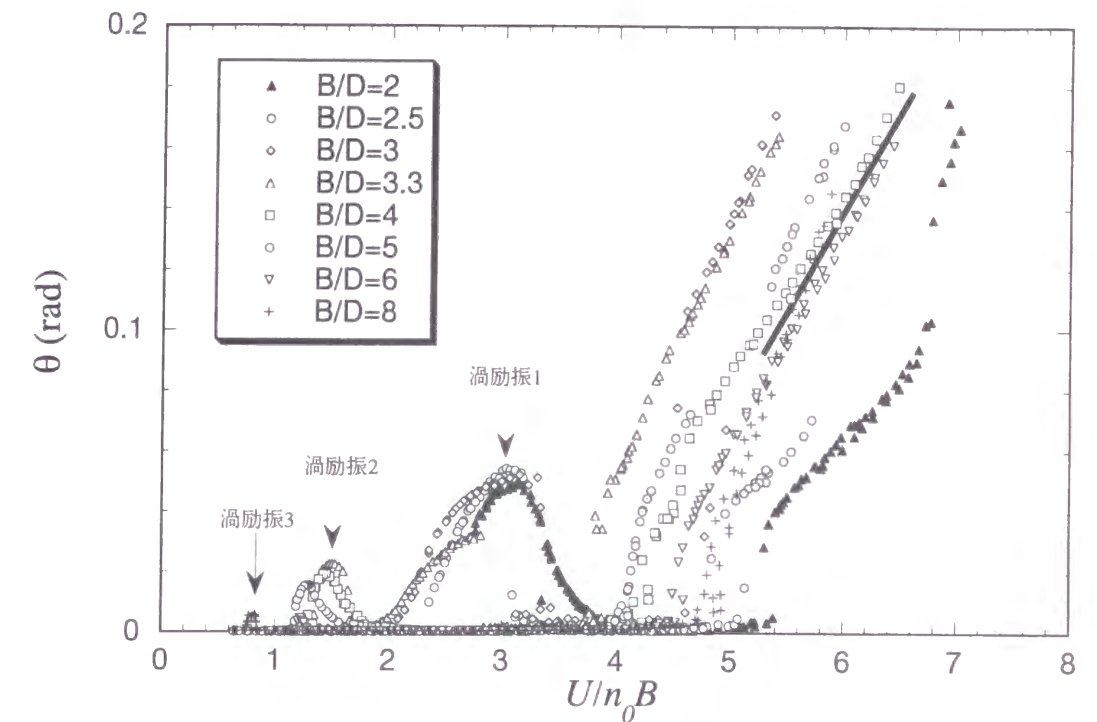


図6.2 種々の辺長比のねじれ自由振動時における実験結果

## 6.3 実験結果

### 6.3.1 種々の辺長比のねじれ振動の発現風速

図6.2には種々の辺長比のねじれ1自由度支持の場合の自由振動の結果を横軸を $U/n_0 B$ として示す。どの辺長比でも低無次元風速側に限定型振動である渦励振と高無次元風速側に発散型振動のねじれフラッターとが発現している。実験を行った範囲ではねじれの渦励振は3つのグループで発現している。ねじれフラッターは概ね $4 < U/n_0 B < 5$ で発現している。ただし $B/D < 4$ と $B/D \geq 4$ とではその発現の仕方に大きな違いが見られる。前者では増速時と減速時とで応答が異なる軌跡を描くいわゆるハードフラッター型なのに対して、後者はほとんど同一の軌跡を描くソフトフラッター型である。また後者では振幅がおおよそ0.1radを超えて振幅が大きくなるにしたがい辺長比による差は小さくなり、図中に実線で示すように辺長比によらず単一の軌跡に収束するようになる。

白石・松本(1982)<sup>1)</sup>および久保・加藤ら(1984, 1986)<sup>2,3)</sup>は前縁からはく離れた渦の流下パターンの考察に基づいて、渦励振の発現無次元風速に関して推定式を示した。それらは以下のように表すことができる。

$$\frac{U_{cr}}{n_0 D} = \frac{1}{n \cdot St^*} = \frac{U^*}{n} \quad (6.1)$$

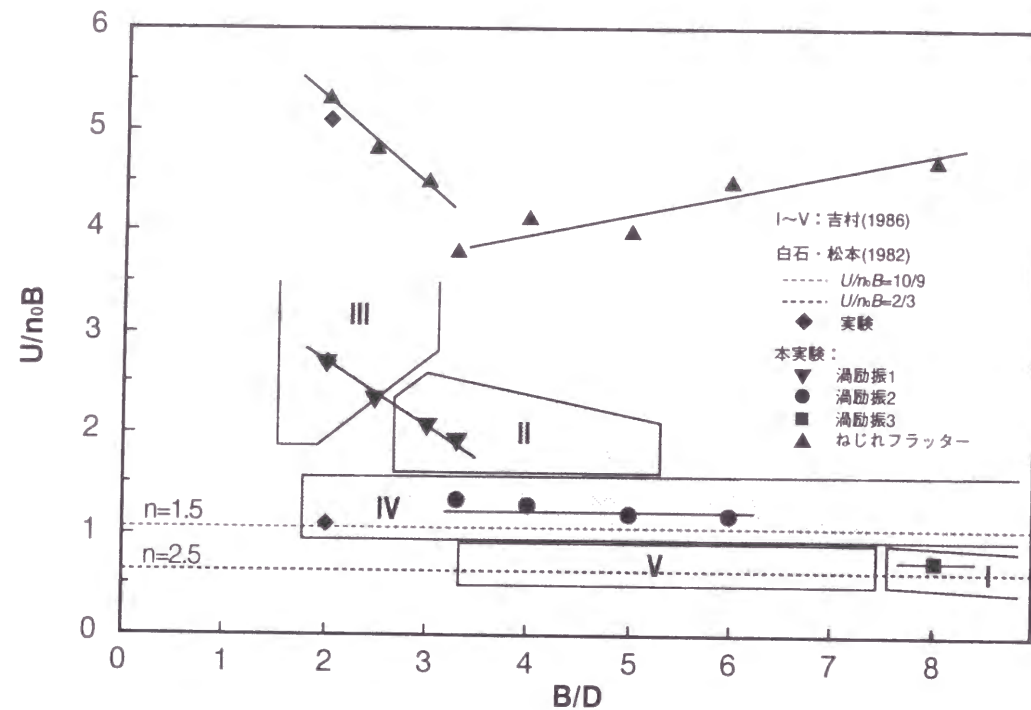


図6.3 ねじれ振動（渦励振，フラッター）の発現無次元風速と辺長比の関係。吉村(1986)の分類は以下のとおり。I, II: Karman 渦に起因する渦励振, III: Impinging-shear-layer instability の基本波の渦との分数調波共振, IV: ISLI の第1高調波の渦に起因する渦励振, V: ISLI の第2高調波の渦に起因する渦励振

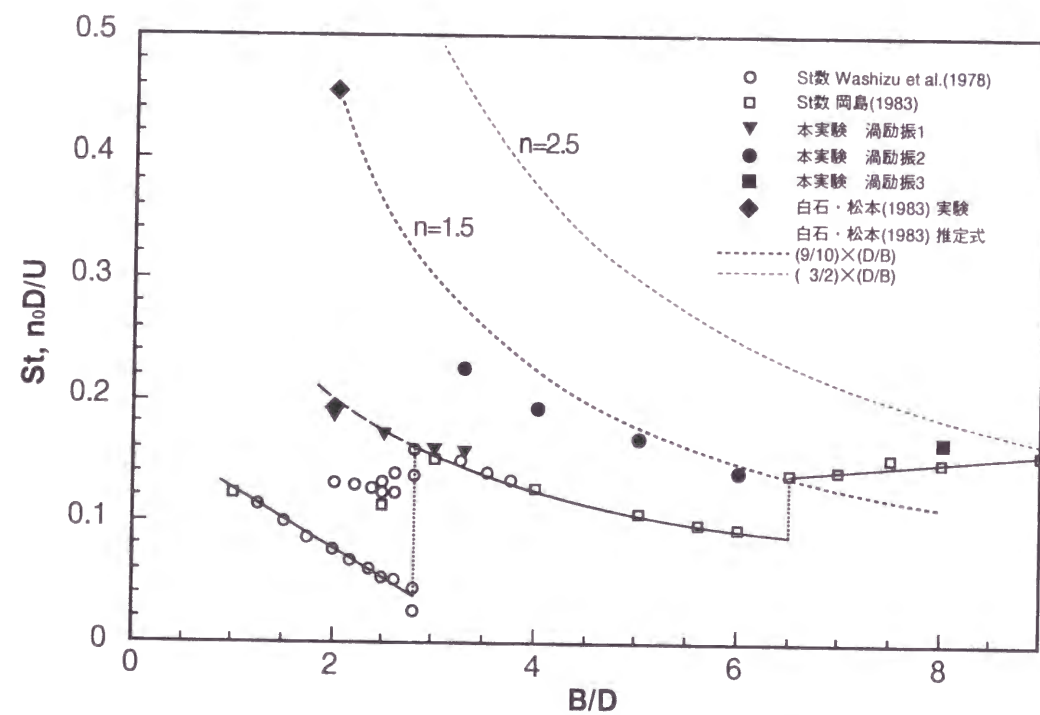


図6.4 ねじれの渦励振の発現無次元振動数と辺長比の関係

ここに  $U_{cr}$  は渦励振の発現風速,  $n_0$  は固有振動数,  $U^*$  は impinging-shear-layer instability による並進の渦励振の発生無次元風速( $=1/St^*$ )である.  $n$  は並進の渦励振については整数倍( $n=1, 2, \dots$ ), ねじれについては0.5の奇数倍( $n=0.5, 1.5, 2.5, \dots$ )である.  $U^*$  として例えば白石・松本による値を用いれば  $U^*=1.67(B/D)$  である. 表6.2に  $n$  のいくつかの値について無次元風速  $U_{cr}/n_0B$  を示す.

表6.2 (6.1)式に基づく渦励振発現無次元風速

並進振動		ねじれ振動	
$n$	$U_{cr}/n_0B$	$n$	$U_{cr}/n_0B$
1	1.67	0.5	3.3
2	0.83	1.5	1.1
.	.	2.5	0.67
.	.	.	.

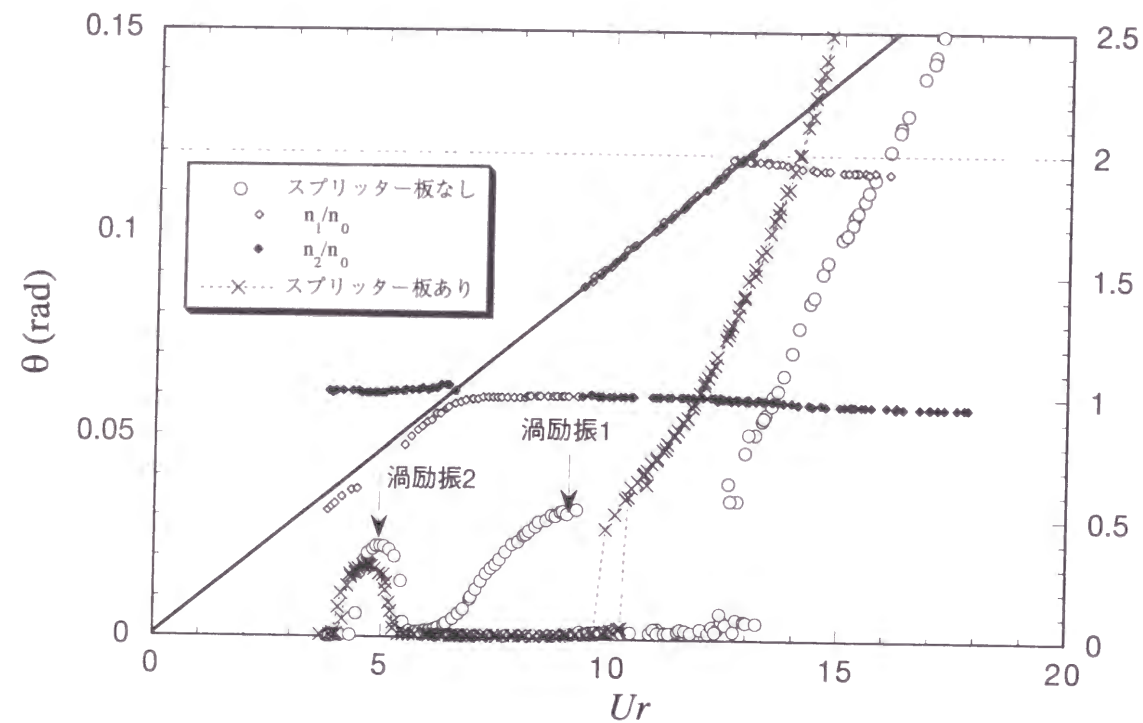
図6.3には本実験により得られた辺長比  $B/D$  とねじれ渦励振およびねじれフラッターの発現無次元風速の関係を示す. 同図には吉村ら(1986)<sup>4)</sup>によるねじれの渦励振の発生要因別の分類(図中の領域I~V)と(6.1)式で  $n=1.5$  と  $2.5$  に対応する無次元風速を示す. また, 図6.4には Strouhal 数および impinging-shear-layer instability の無次元振動数とねじれ振動の発生無次元風速の関係を示す.

本実験で得られた渦励振2, すなわち  $3.3 \leq B/D \leq 6$  では辺長比  $B/D$  によらず発現無次元風速  $U/n_0B$  が一定であり, 吉村らのIV (impinging-shear-layer instability の第1高調波の渦に起因する渦励振) の分類に属する. この部類の渦励振は図中破線で示す  $n=1.5$  に対応する値によって推定できる.

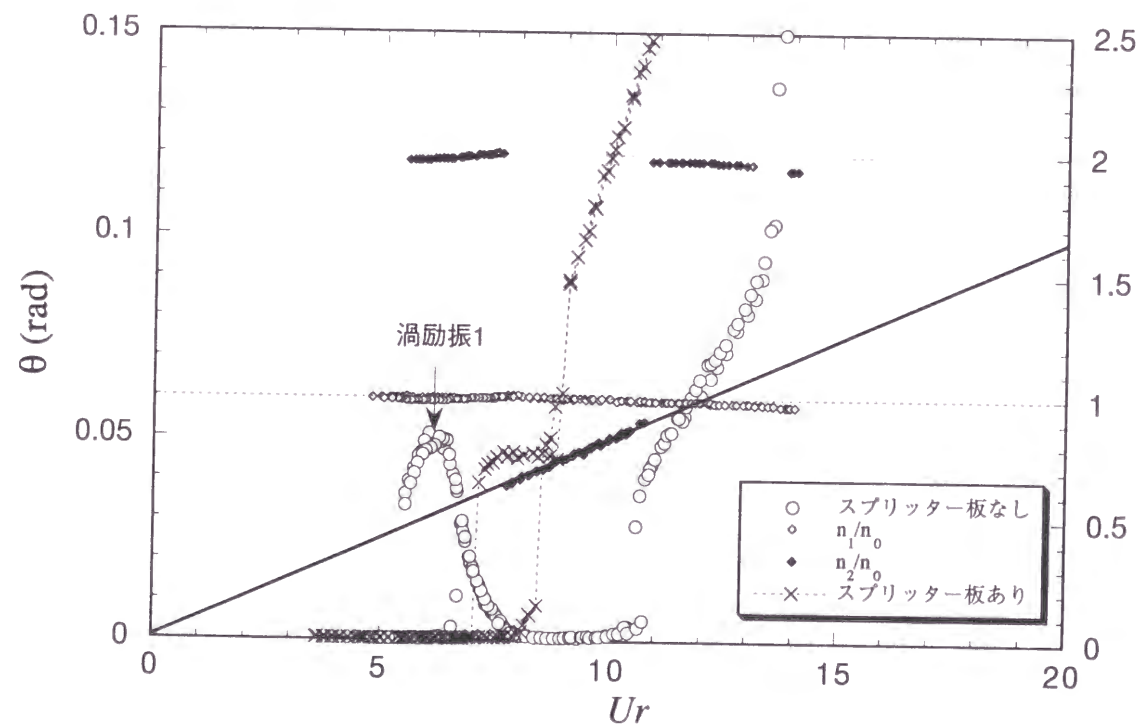
$B/D=8$  の渦励振3は分類Iに属する. 吉村らによればこの領域の渦励振は, Strouhal 数の逆数によって定まる共振風速と一致 ( $B/D=8$  では  $St=0.15$ . したがって  $U/n_0B=0.83$ ) するため, 定常的再付着型の Karman 渦励振であるとしている. ただしスプリッター板を設置した場合にも消失せず, impinging-shear-layer instability による渦励振が生じることを報告している. またこの領域の発現無次元風速は  $n=2.5$  に対応する渦励振とも一致することから, この領域は Karman 渦の発生周波数と impinging-shear-layer instability の第2高調波が極めて近接した領域であるといえる.

渦励振1は  $2 \leq B/D \leq 3.3$  で見られ, 発現無次元風速  $U/n_0B$  は辺長比  $B/D$  に伴って変化する. この領域の渦励振は吉村らの分類のIIとIIIに属する. 吉村らによれば分類IIは Karman 渦励振, 分類IIIは impinging-shear-layer instability の基本波の渦との分数調波共振であるとしている.





(a)  $B/D=3.3$



(b)  $B/D=2$

図 6.5 ねじれ振動時の応答と卓越振動数の関係。  
ねじれ振動に及ぼすスプリッター板の影響。

図 6.3 では  $B/D=3.3$  のねじれ振動は分類 II, IV, V に属することが示されているが、本実験ではその内 II と IV に属するものが再現された。図 6.5 (a) にはスプリッター板を設置した場合の応答の変化について示す。 $B/D=3.3$  ではスプリッター板を挿入することで渦励振 1 は消失するが、渦励振 2 にはほとんど変化がない。この結果は吉村らの結果と一致し、吉村らが示しているように渦励振 1 は Karman 渦に基づくものであることが考えられる。

図 6.4 からは、渦励振 1 と渦励振 3 は Strouhal 数の曲線に近いのでこれらの渦励振は Karman 渦の影響を強く受けていることが考えられる。この内、特に渦励振 1 の  $B/D=2$  および  $B/D=2.5$  は  $B/D>2.8$  の Strouhal 数の branch の延長上に位置している。後述するようにそれらはそれぞれの固有の Strouhal 数の約 2 倍に相当する。

吉村らの分類ではさらに分類 V が存在するが、本実験ではこの分類に属する渦励振は見られなかった。これは実験条件、すなわち Scruton 数が吉村らのものより大きいためと考えられる。

ねじれフラッターの発現無次元風速は渦励振 1 が発現するグループと渦励振 2 および渦励振 3 が発現する  $B/D \geq 3.3$  の 2 つに分けて見ることができる。この内、渦励振 1 のグループである  $B/D \leq 3.3$  では渦励振の発現無次元風速とねじれフラッターの発現無次元風速の間におよそ 2 倍の関係が見られる。以上のことより  $2 \leq B/D \leq 8$  の辺長比領域では、 $B/D=3.3$  付近を境にねじれ振動の性状を異にしている。

### 6.3.3 $B/D=2$ 断面のねじれの渦励振

図 6.6 には  $B/D=2$  断面のねじれ 1 自由度の自由振動実験結果を示す。図中では減衰および質量慣性モーメントの構造パラメータを種々に変えて示してある。同図中には白石・松本 (1982)<sup>2)</sup> および Miyata et al. (1983)<sup>5)</sup> による実験結果も示す。白石らの実験は極めて小さな質量慣性モーメント比で行われており、 $Ur=2.2$  で Impinging-shear-layer-instability に基づく渦励振も見られる。本実験結果も含めていずれの実験結果でも  $Ur=5.5$  付近から渦励振が生じている。これは、 $n=0.5$  とした場合  $Ur=6.7$  となり若干の差がある。

図 6.5 (b) に示すスプリッター板を設置した場合では  $Ur=5.5$  付近から始まる渦励振は発生していない。したがってこの渦励振は Impinging-shear-layer-instability に基づくものではないことが考えられる。渦励振発生時の渦放出の無次元振動数は  $f_v=1/5.5=0.182$  で、この断面の静止時の Strouhal 数の 2.1 倍の値となっている。これらのことから類推するとこの  $Ur=5.5$  から始まる渦励振は Strouhal 数の 2 倍の振動数の不安定性に対応する Karman 渦に起因する励振であると考えられる。



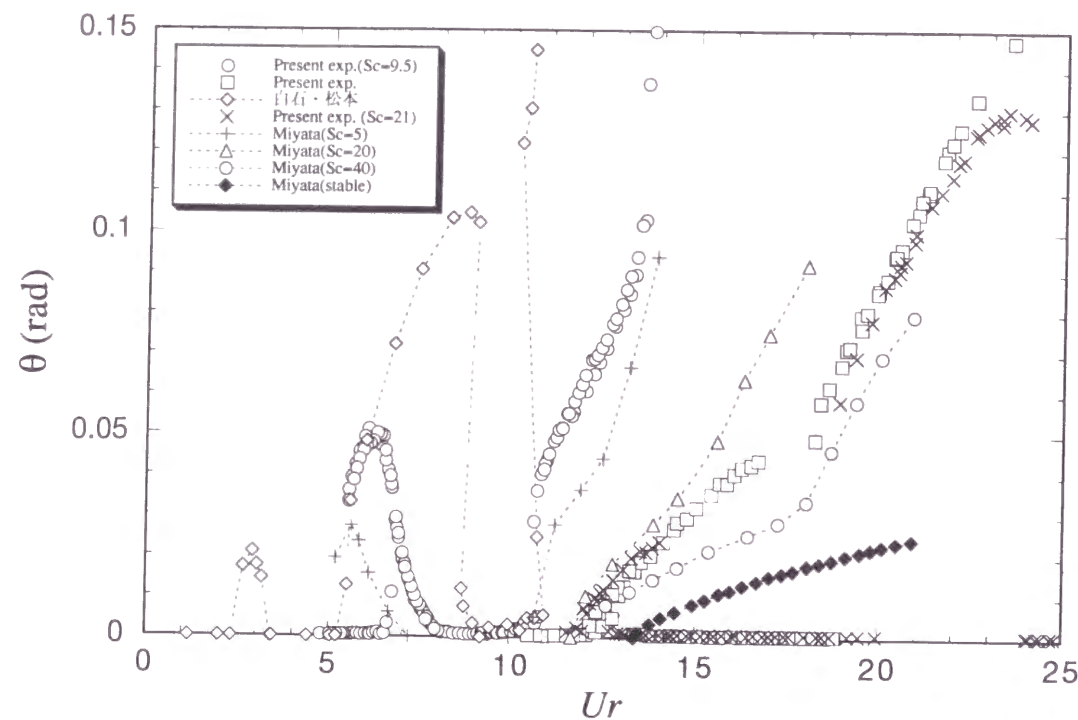


図 6. 6  $B/D=2$  のねじれ自由振動における Scruton 数の効果

#### 6. 3. 4 $B/D=2$ のねじれの発散振動

図 6. 6 中で◇, ○, +で示す Scruton 数が小さい場合, Strouhal 数の逆数により定まる共振風速に近い  $Ur=11$  付近からは, 発散的な振動が発現している. 一方, Scruton 数が大きい場合応答には限定的な様相が見られる. 図 6. 6 中に示す本実験の内, Strouhal 数が大きい×で示したものは  $Ur=15$  において振動が治まる. これはこの無次元風速領域が Strouhal 数の逆数から求まる共振風速に近いことから Karman 渦の影響が及んでいるためと考えられる. さらに風速を増加させても再び発振することはないが, 大きな初期振幅を与えると  $Ur=20$  から再び振動が見られ,  $20 \leq Ur \leq 24$  で限定的な応答が見られた. 図 6. 6 中◆で示される Miyata et al.(1983)<sup>9)</sup>の実験結果は振動が発達するか否かの境界を示しており,  $Ur > 18$  の領域で振動が治まる領域があることが示唆されている. この無次元風速領域でのねじれ振動の同様な性状は,  $B/D$  が小さい H 型断面の場合に限定的な様相を示すこと (松本ら 1990<sup>7,8)</sup>) によっても示されている.

### 6. 4 $k-\epsilon$ モデルの適用性の検討

#### 6. 4. 1 $B/D=2$ 断面のねじれ強制加振時の非定常空気力

本節ではまずねじれ強制加振時の非定常空気力を考察する. 図 6. 7 には  $B/D=2$  断面のねじれ強制加振時の非定常空気力係数を示す. 加振振幅は鷲津ら(1976)<sup>9)</sup>の実験結果にあわせて  $3.82^\circ$  とした.

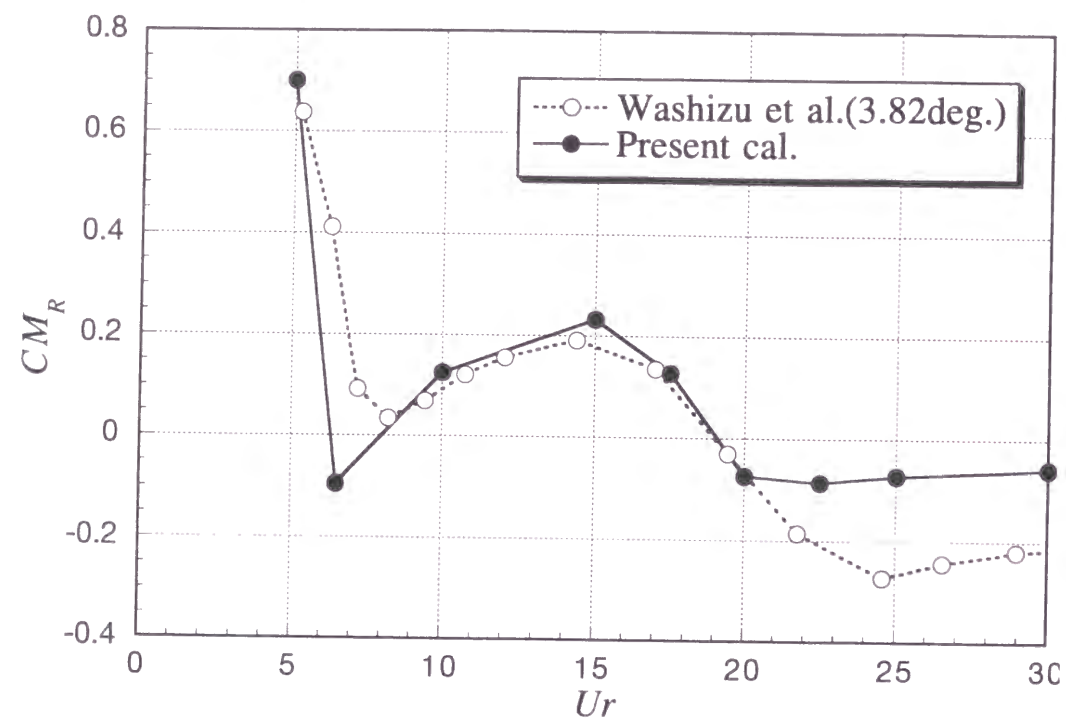
$Ur=5$  付近からは非定常空気モーメントの速度同相成分 (図 6. 7 b) は急激に負から正に転じている. これは自由振動実験結果のところでも示したように Strouhal 数の約 2 倍の振動数に一致している. また自由振動実験結果で極めて小さな Scruton 数においても励振が発生しなかった  $Ur=10$  近辺の非定常空気モーメントの速度同相成分は 0 に近く, この領域で振動が生じにくいことが示されている.

鷲津らの実験結果の速度同相成分 (図 6. 7 b) ではこの加振振幅では  $Ur=30$  までにわたって正であり振動の発現の可能性を示している. この傾向は  $Ur=10$  程度の比較的低い無次元風速からはじまっており, ねじれの渦励振に引き続いてねじれフラッターが発現する可能性を示している. 解析結果は  $Ur \leq 20$  では鷲津らの実験結果と非常によく一致している. 一方  $Ur > 20$  では位相差 (図 6. 7 d) も異なっており約  $180^\circ$  のずれがある. このときの流れ場の様子 (図 6. 8) を見ると,  $Ur=20$  を境に後流域での渦形成が大きく変化している. すなわち,  $Ur \leq 20$  では比較的断面近傍に渦が巻き込まれているのに対し,  $Ur > 20$  では渦の巻き込みが物体より遠ざかっている (図 6. 8,  $Ur=22.5$ ). これは静止時または並進強制加振時の後流域での渦の巻き込みと類似している.

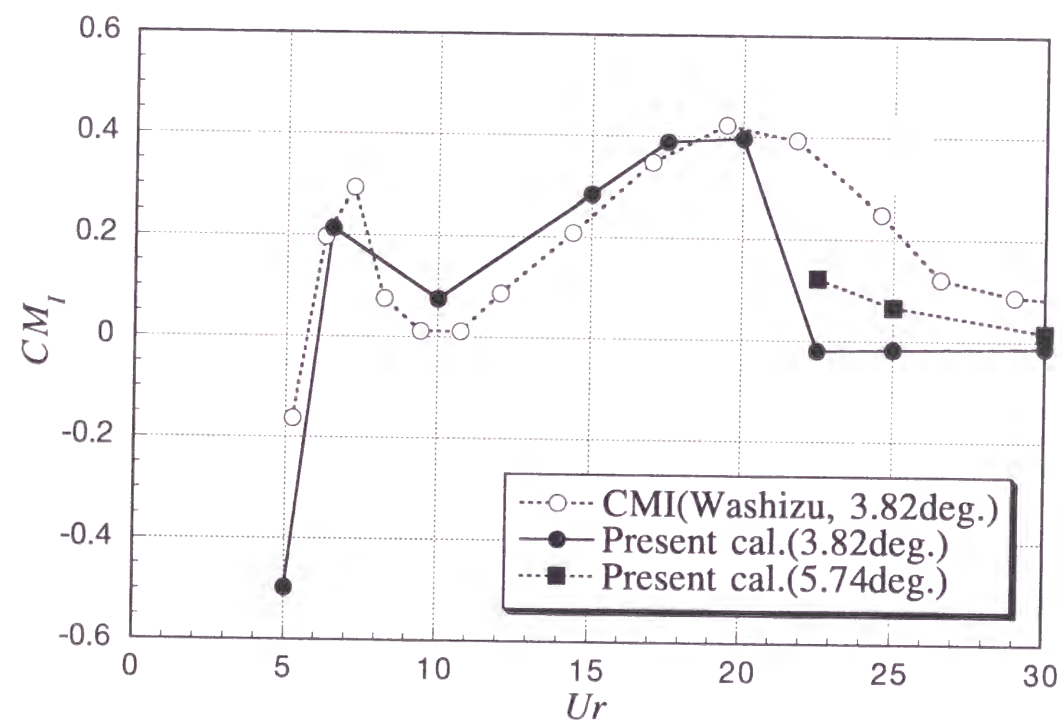
図 6. 9 には  $Ur=6$  の時のねじれ強制加振時における側面上の非定常風圧分布を示す. 非定常空気モーメントとして見ると, 風下側側面の風圧変動が励振モーメントとなっていることがわかる. 本数値解析結果は Miyata et al.<sup>9)</sup> および瀬戸らの 3 次元数値解析結果<sup>10)</sup>とも非常によく一致している.

それぞれの強制加振時の空気力波形および流れのパターン (図 6. 8) を見ると, ねじれの強制加振時では並進の強制加振時に高無次元風速域において見られた Karman 渦放出が見られず, 加振振動数成分のみであるのが大きな特徴である.

$Ur > 20$  で励振モーメントが認められなくなる点については, 数値解析上の問題, すなわち本解析に用いた乱流モデルの不備に起因しているとも考えられる. 一方, 既往の風洞実験結果をよく見るとそのような傾向が示唆されている. Nakamura(1982)<sup>11)</sup>は  $B/D=2$  の非定常ピッチングモーメントを計測している. そのデータ中では  $Ur > 15$  で速度同相成分が負, すなわち減衰力に転じることがあることを示されている. ただし同文献中にはこのときの加振振幅が明記されていないため, 本解析結果との直接の比較はできないが, このことは本解析結果の速度同相成分が  $Ur > 20$  で負に転じたこととよく対応している. 鷲津らの非定常ピッチングモーメン

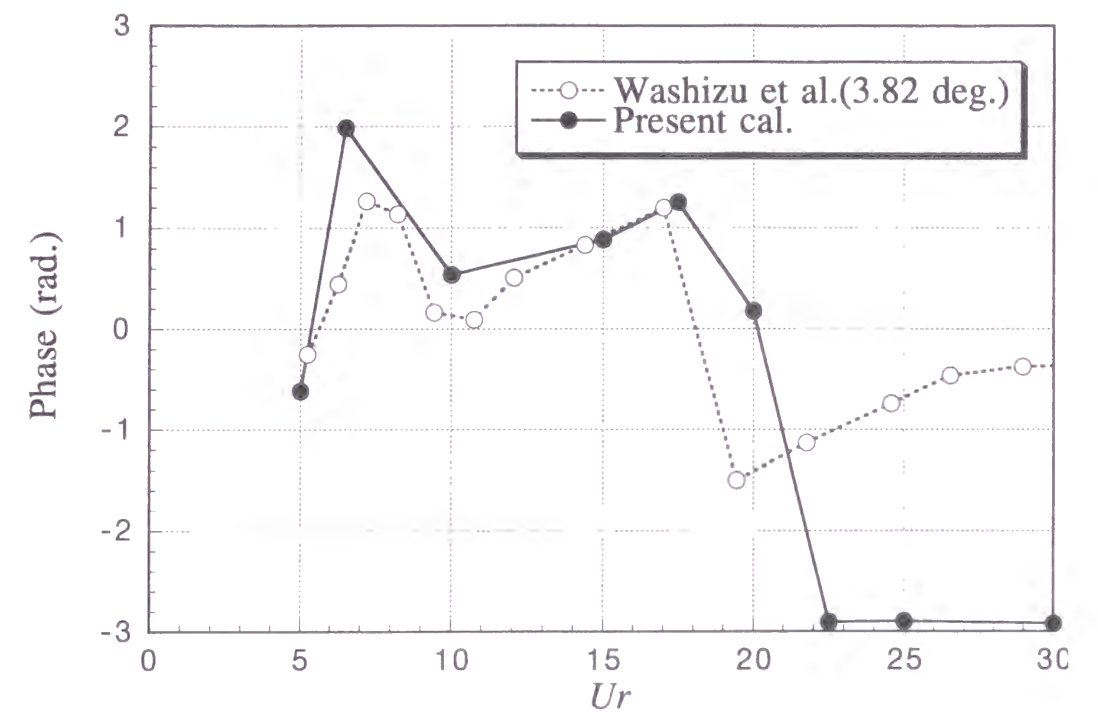


(a)変位同相成分

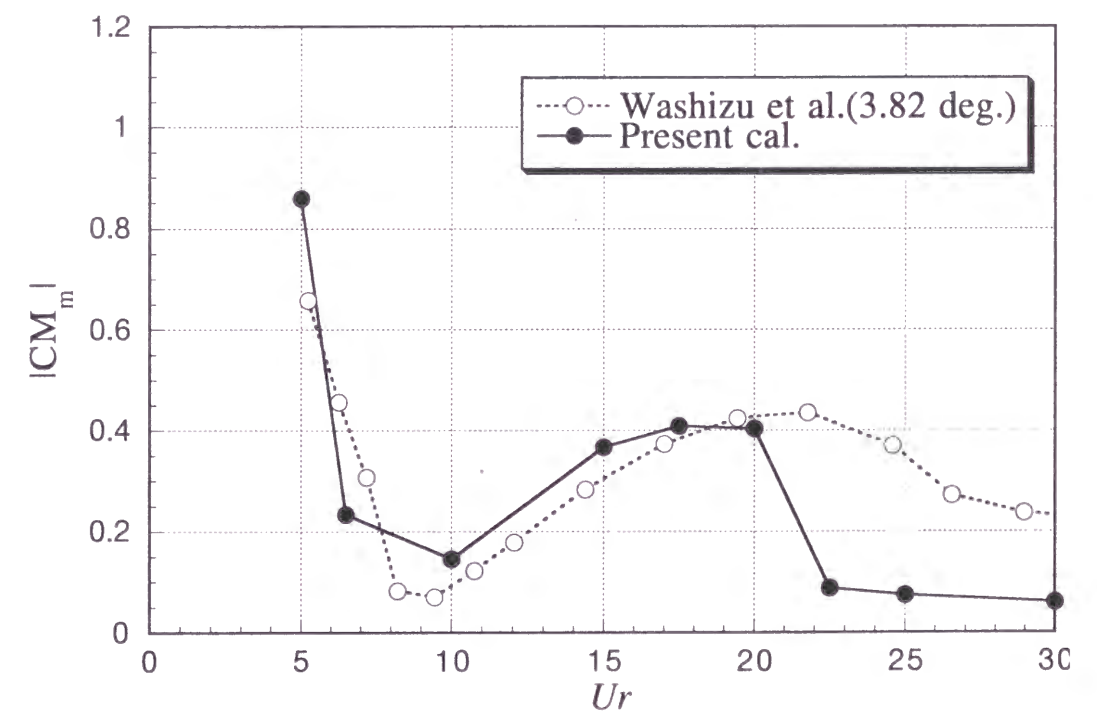


(b)速度同相成分

図 6. 7  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の非定常空気力係数



(c)Phase



(d)絶対値

図 6. 7  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の非定常空気力係数



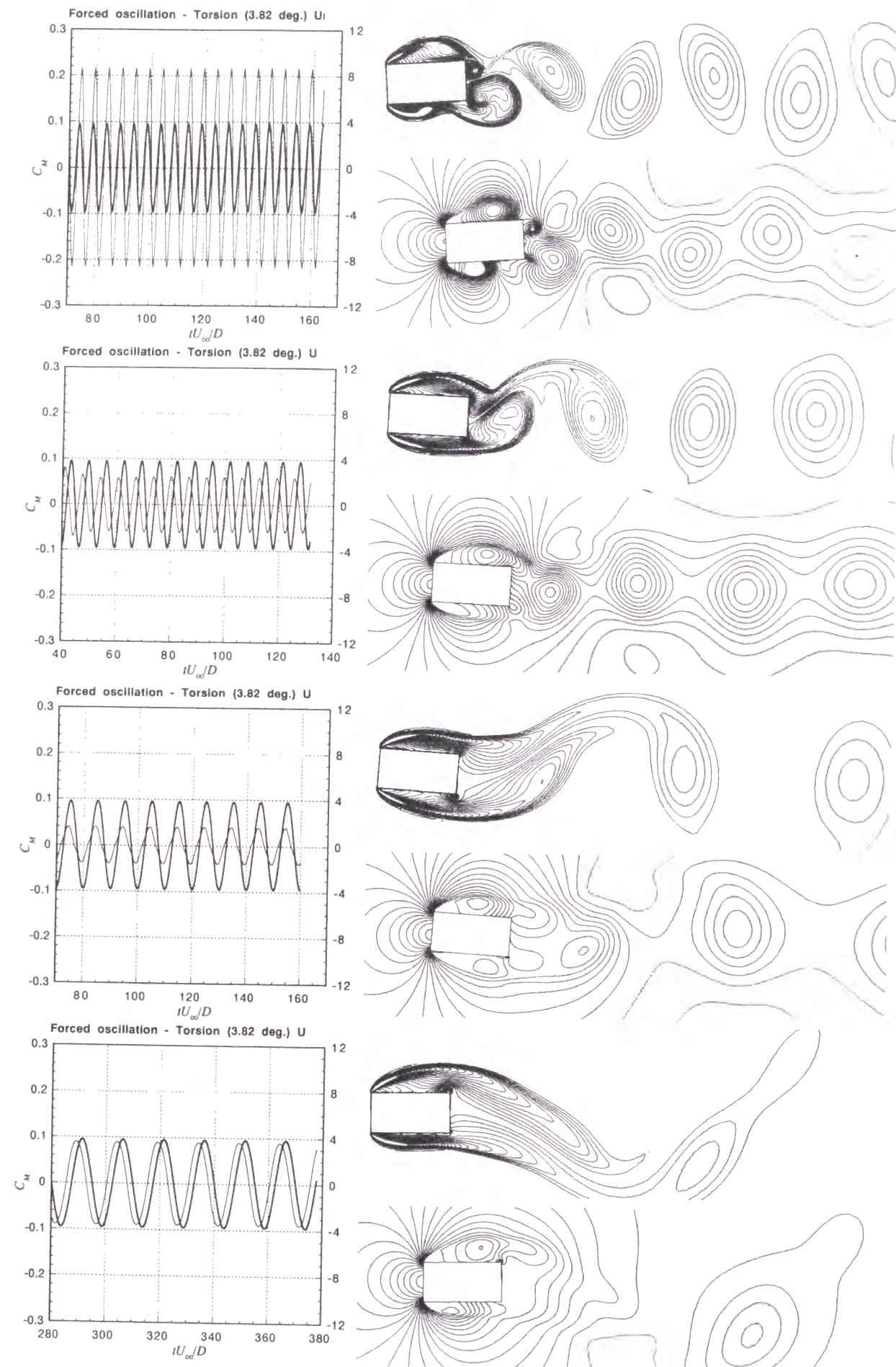


図 6. 8  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列

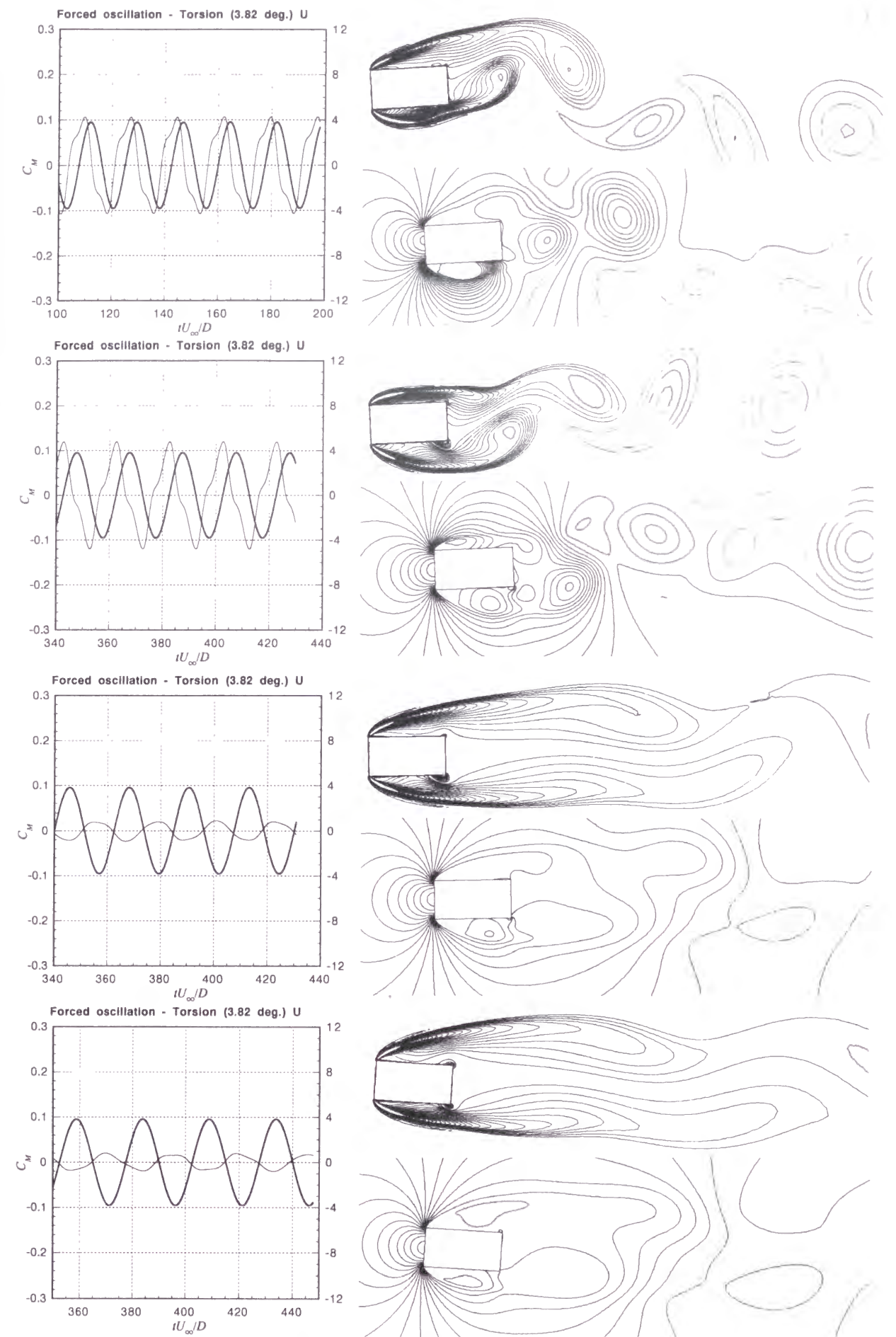


図 6. 8  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列



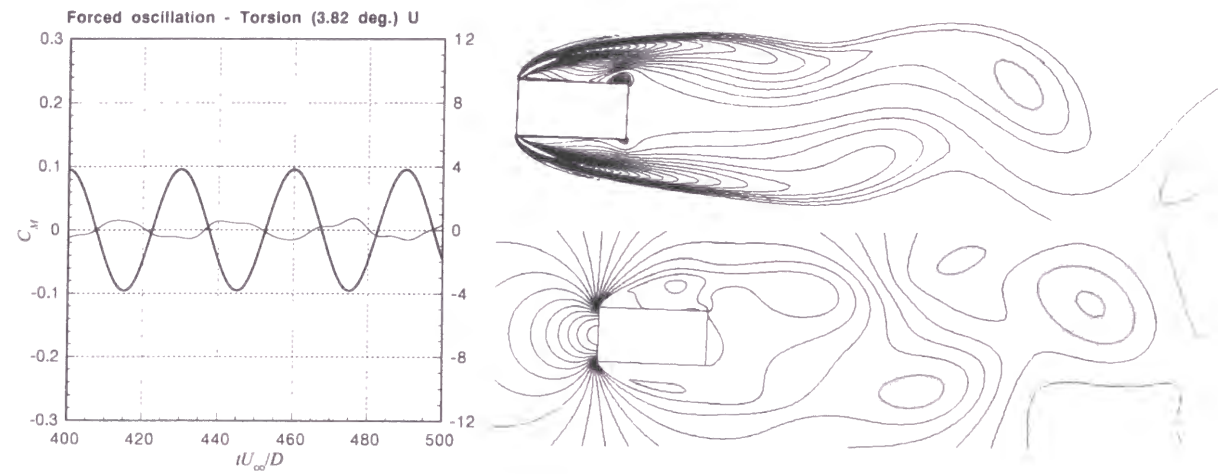


図 6. 8  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列

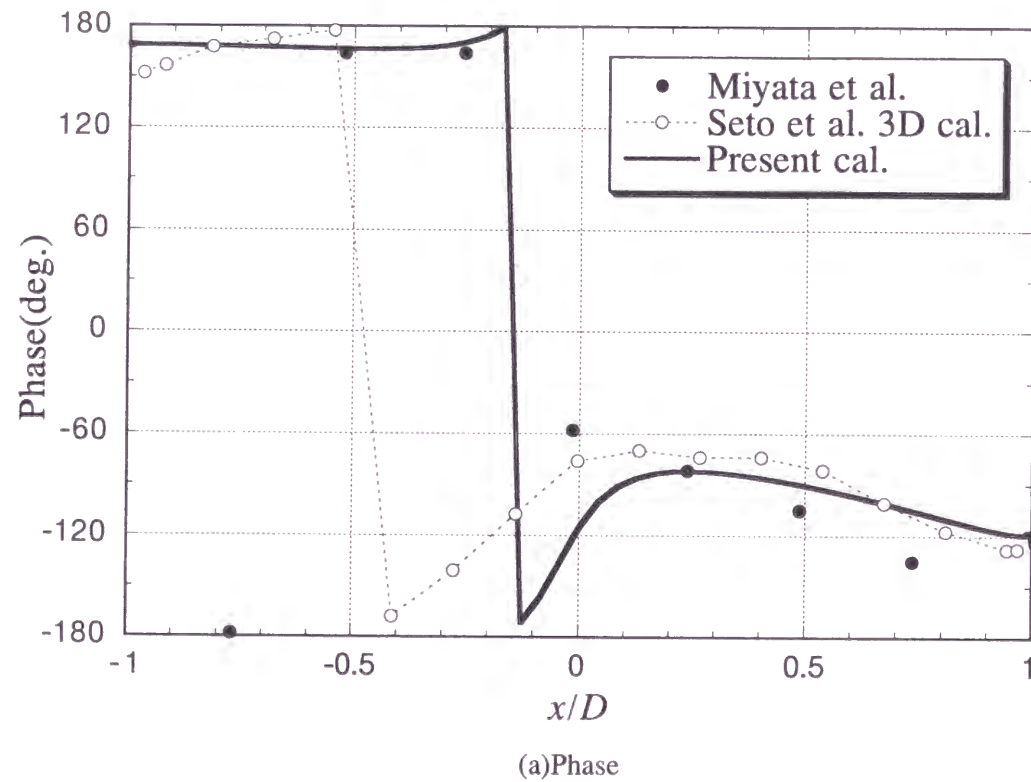
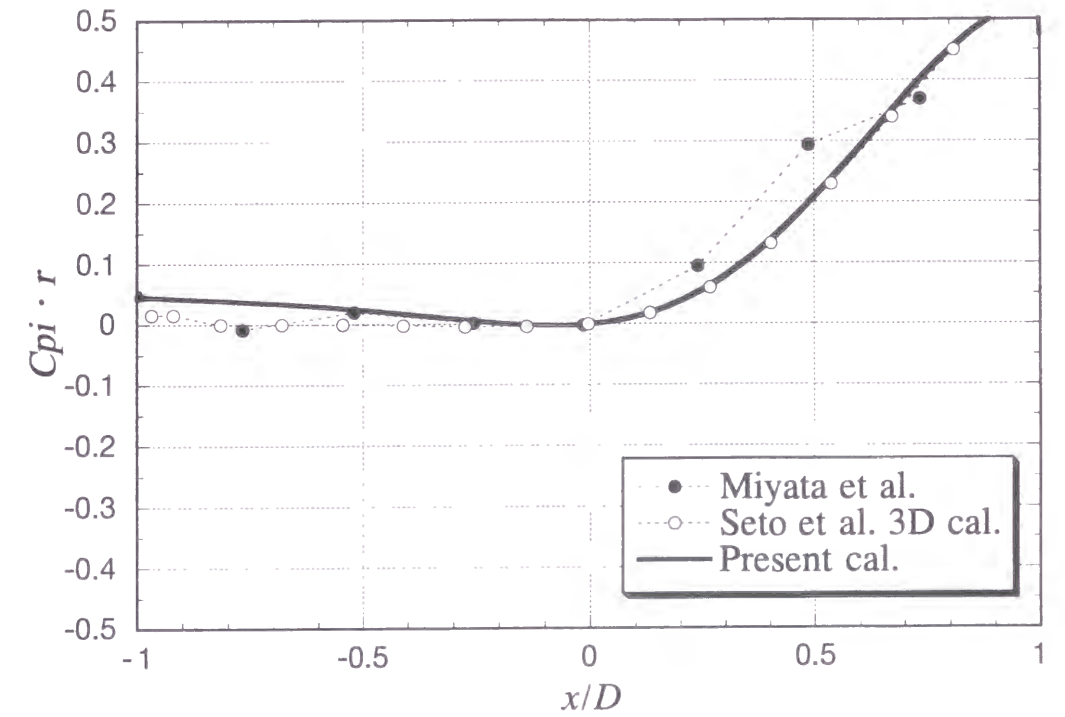


図 6. 9  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 ( $Ur=6$ , 加振振幅  $2^\circ$ ) の非定常風圧力分布



(b)非定常空気モーメント  $C_{pi} \times r$

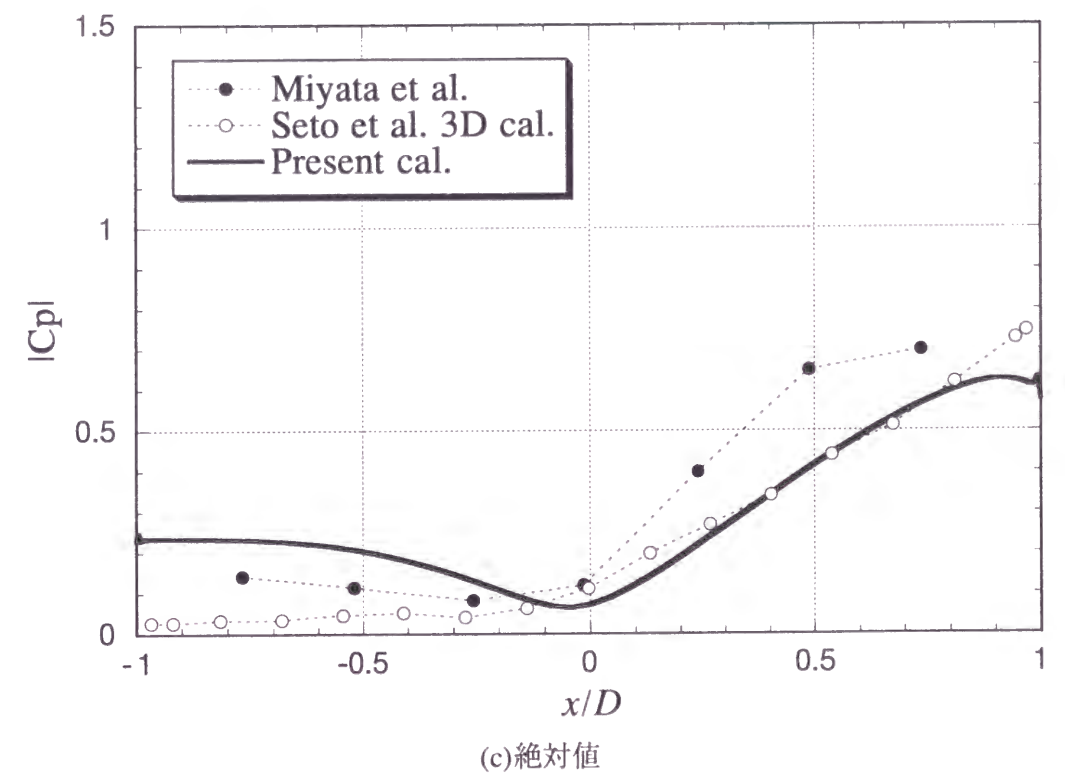
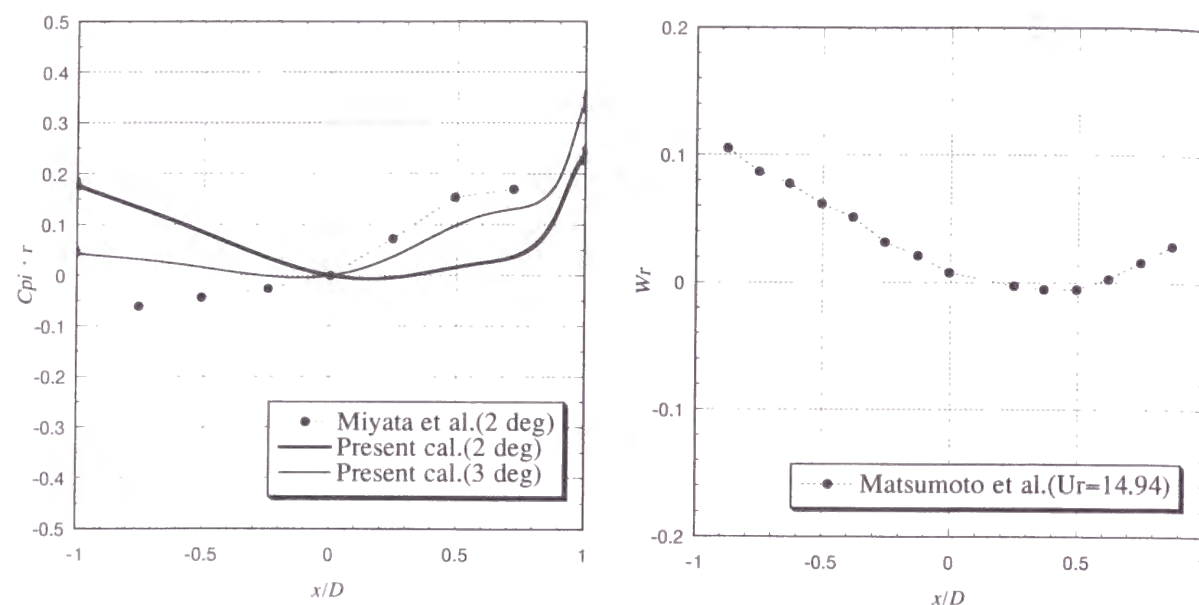


図 6. 9  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 ( $Ur=6$ , 加振振幅  $2^\circ$ ) の非定常風圧力分布



(a)  $Cp_i \cdot r$  分布 ( $Ur=14$ )

(b)  $Wr$  分布 ( $Ur=14.94$ )

図6.10  $B/D=2.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅:  $2^\circ$ ) の非定常風圧力分布

## Model 1:2

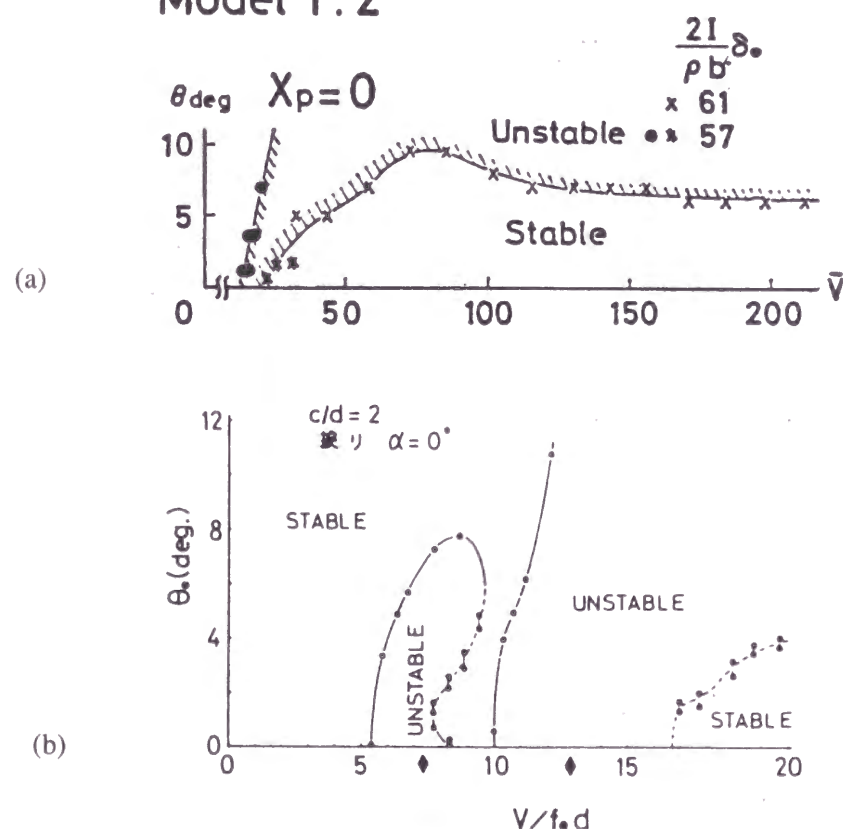


図6.11  $B/D=2.0$  ねじれ振動における安定 - 不安定領域 (a) Nakamura et al. (1975)<sup>11)</sup>, (b) 鷺津ら (1976)<sup>9)</sup>

トの計測結果でもさらに高無次元風速になるとその値が減少している点は同じである。また、Matsumoto et al. (1997)<sup>12)</sup> は  $10 \leq Ur \leq 44$  の領域で  $B/D=2$  断面の表面非定常風圧による仕事を求めている。これによると、 $Ur=12$  までは風下側が励振力となっているが、 $Ur=18$  までは風上側が励振力となり、その後は全面にわたって励振力は0となっていることを示している。図6.7に示す解析で得られた傾向は Matsumoto et al. の結果とも一致している。ちなみに図6.10には  $Ur=14.94$  における表面非定常風圧による仕事の分布と、 $Ur=14$  における  $Cp_i \cdot r$  の分布を示す。本解析による  $Cp_i \cdot r$  の分布と Matsumoto et al. による仕事の分布はよく一致している。

本自由振動実験結果 (図6.6) では  $Ur=24$  において、応答が限定的になる様相を呈した。鷺津ら<sup>9)</sup>、Nakamura (1975)<sup>11)</sup> (図6.11) および Miyata et al.<sup>5)</sup> の自由振動実験でもおよそ  $Ur > 15$  において不安定なリミットサイクルがあることが示されている。上記の強制加振実験結果はこのリミットサイクルの存在に対応している。この領域で一旦生じた振動は、減衰定数および質量比が小さいとこのリミットサイクルの範囲外を応答は発達するが、これらがある程度大きく、応答の発達がゆるやかになると、ある風速で再びリミットサイクルの範囲に入り、応答は減少する。Scruton 数が多い場合の  $B/D=2$  のねじれフラッター応答が限定的に見える現象はこのように考えることができ、リミットサイクルの存在と深く関係しているものと考えられる。

## 6.4.2 $B/D=2$ 断面のねじれ自由振動時の解析結果

図6.12には  $B/D=2$  断面のねじれ1自由度自由振動時の解析結果と本実験結果の比較を示す。Scruton 数は  $Sc=2I \delta / (\rho B^2 D^2)=8$  ( $I$ : 単位長さあたりの慣性モーメント) とした。減衰定数は  $h=0.372\%$  とした。図中○は実験結果を示し、縦軸は応答が一定になったときの定常振幅を示す。応答は極めて sinusoidal である。本実験結果は計測された r.m.s. 値を  $\sqrt{2}$  倍して示した。実験結果では  $Ur=5.5$  で渦励振が発振し、 $Ur=10.5$  からは発散型振動が発振している。6.3.3で述べたように  $Ur=5.5$  で発振する渦励振はスプリッター板を挿入することで消失することから、この渦励振は Karman 渦の2倍の振動数成分によるものと考えられる。また  $Ur=11$  から発振する発散型振動は、発振風速が Strouhal 数に対応した共振風速にほぼ一致することから基本的には Karman 渦の影響を受けた渦励振として発振した後、質量減衰比が小さいため発散振動へ移行したのと考えられる。本実験では計測上の理由から回転角変位として  $0.1\text{rad}$  までしか計測されていないのでそれ以上の振幅の挙動に関しては不明であるが、この  $Ur=11$  から発振する発散型振動は既往の実験においても同様に無次元風速に対して急激な立ち上がりを示す。これらのことからこの振動はいわゆるねじれフラッターであると考えられる。

図中で●は本解析結果を示す。本解析結果は  $Ur=5.5$  で発振する渦励振から  $Ur=11$  から発振するねじれフラッターまでを定量的にも十分な精度で再現している。 $Ur > 11$  のねじれフラッ

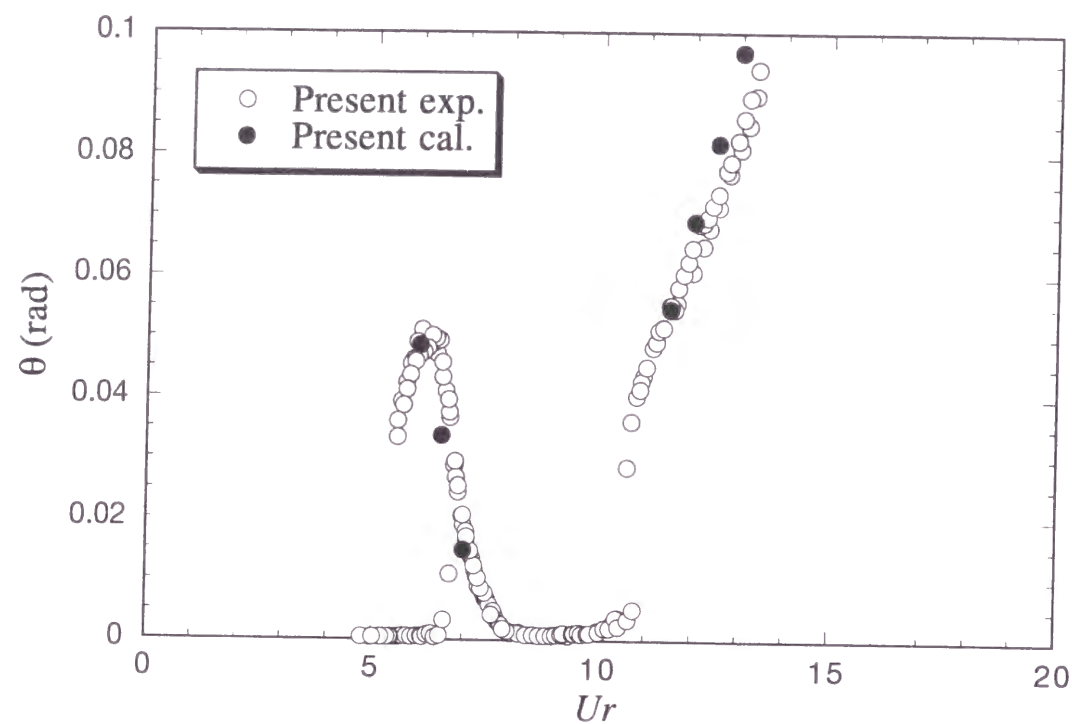


図 6. 1 2  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動時の解析結果と実験結果の比較

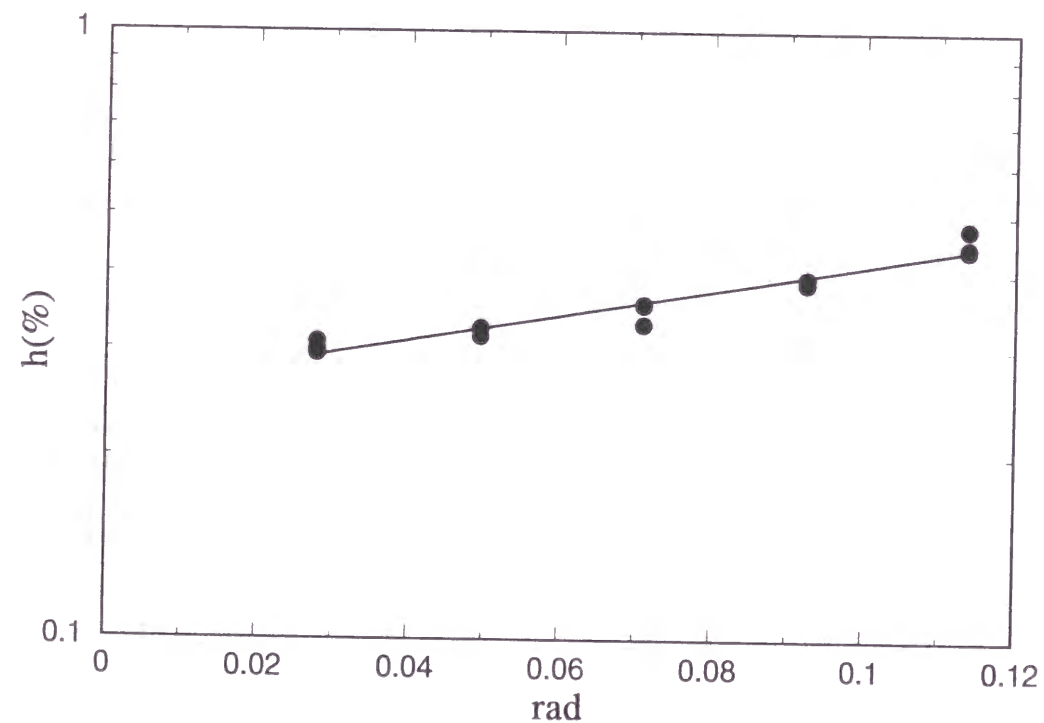


図 6. 1 3  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動実験時の減衰定数の振動振幅に対する変化

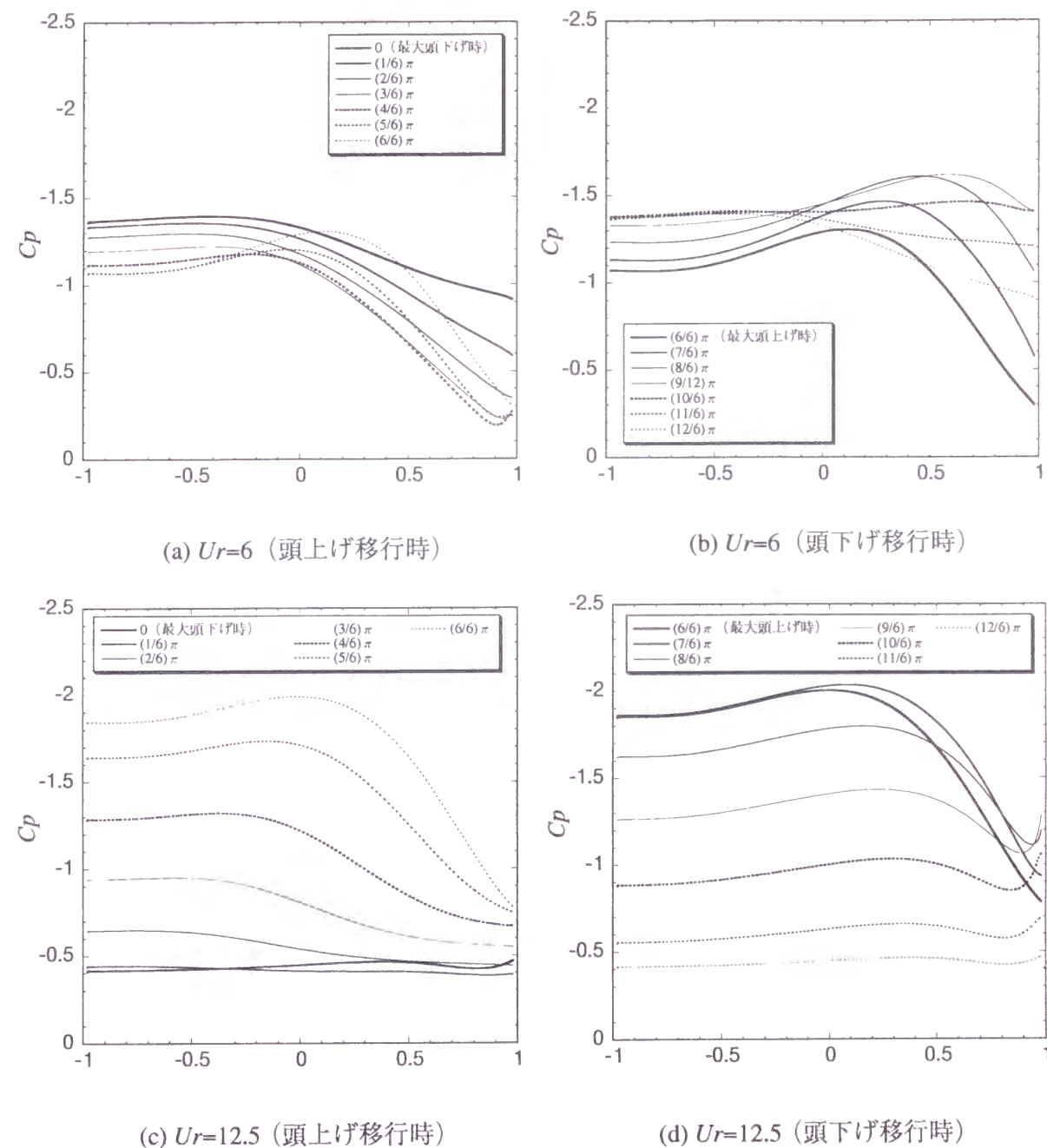


図 6. 1 4  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動時の側面上の風圧分布

ター時に本解析値が若干ながら大きめな値を示すのは実験時との減衰定数のずれによるものである。本実験時における減衰定数の振幅による変化を図 6. 1 3 に示す。解析では渦励振のピーク時に相当する  $\theta=0.05$  のときの減衰定数として 0.00325 を一定値として与えたため、ねじれフラッター時には実際よりも減衰が小さく、結果として応答が大きめに評価されている。

図 6. 1 4 には渦励振が実験ではほぼ最大応答 (0.05rad) を示す  $Ur=6$  時と、ねじれフラッターを示している  $Ur=12.5$  時 (0.085rad) における振動 1 周期間の上側面の圧力分布を示す。 $Ur=6$ ,  $Ur=12.5$  いずれも側面全体が負圧になっている。側面全体で見た場合、 $Ur=6$  では最大頭



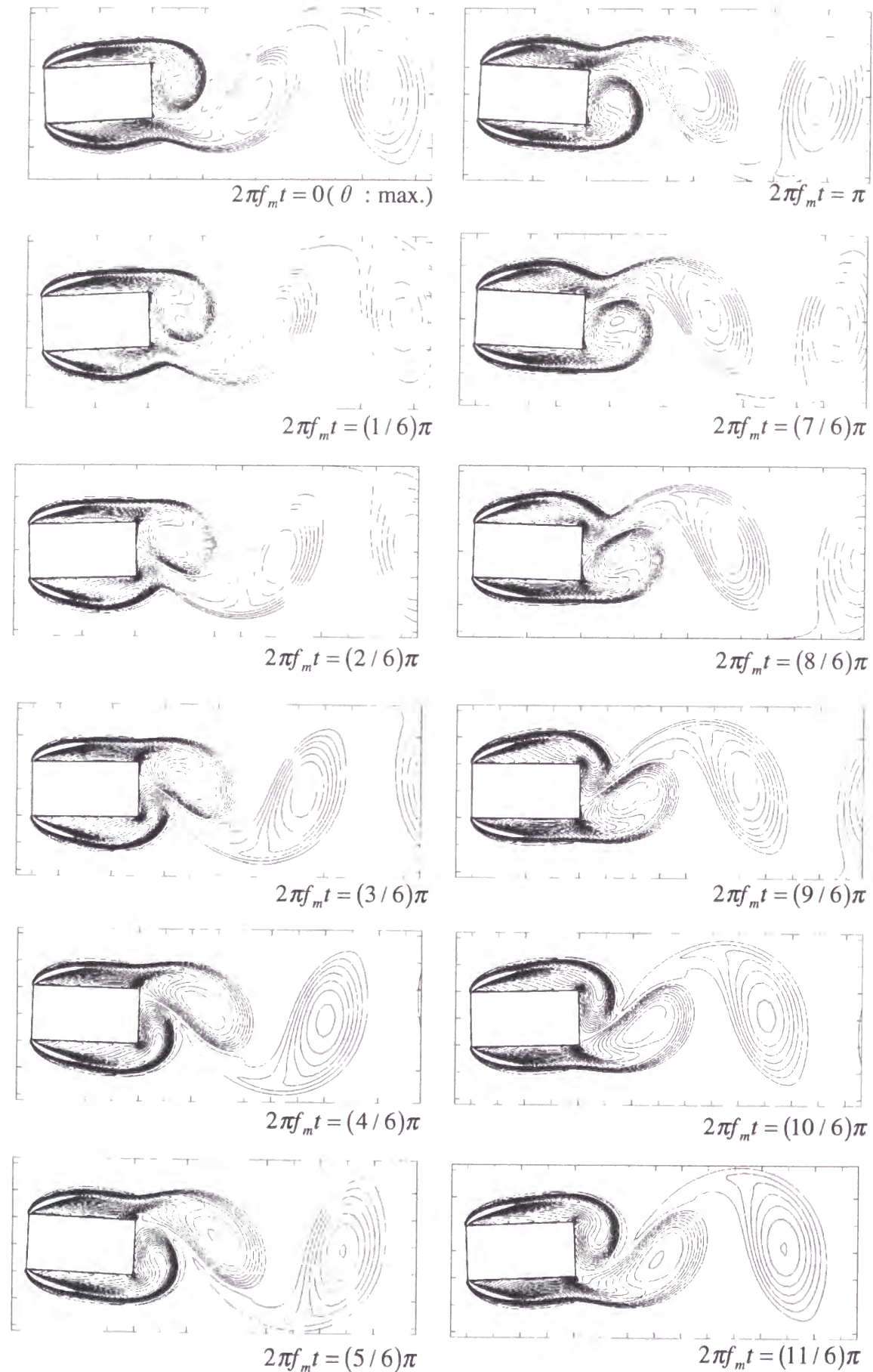


図6. 15  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=6$ ) の渦度の振動1周期間の時間変化

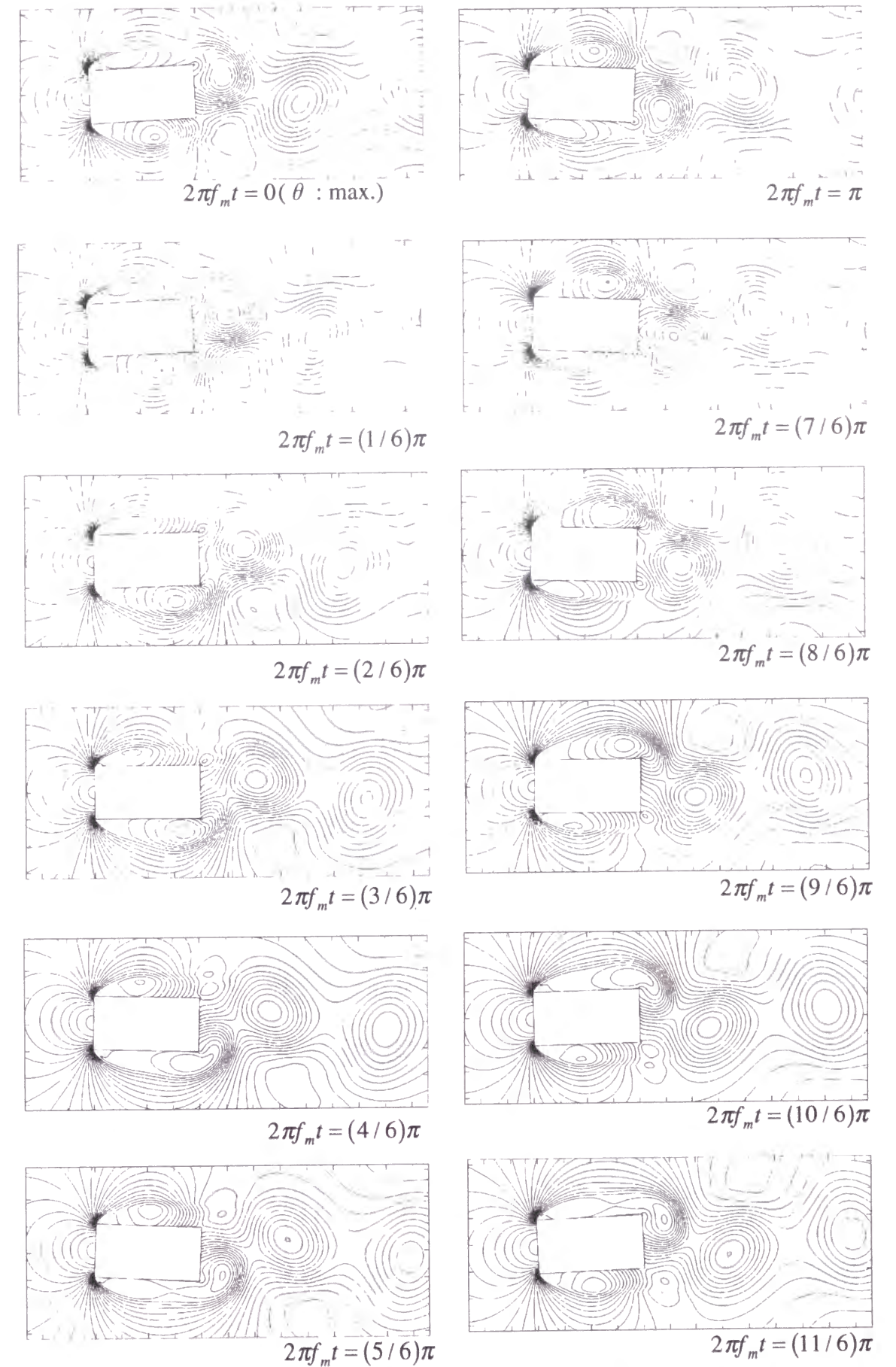


図6. 16  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=6$ ) の圧力の振動1周期間の時間変化



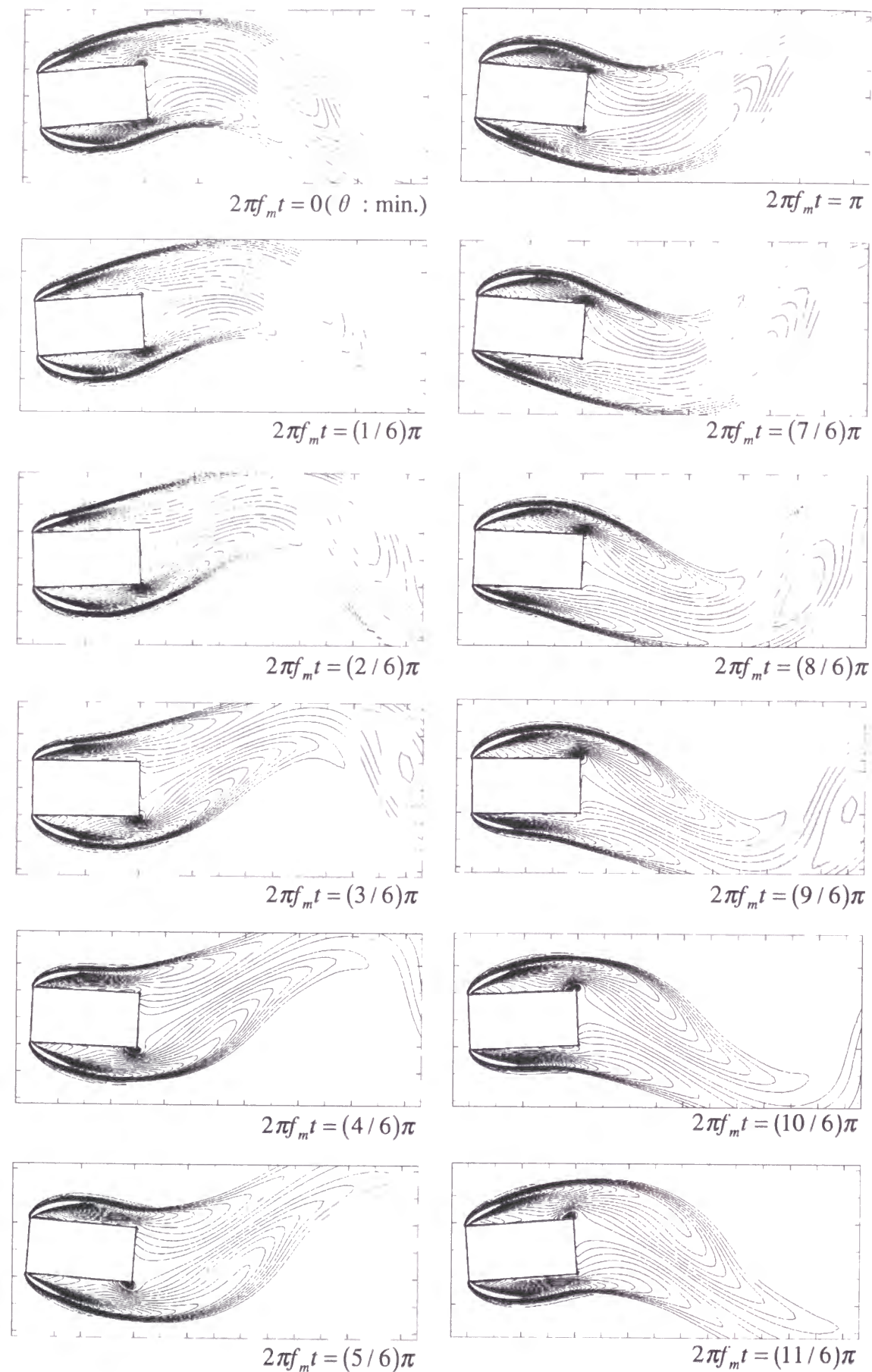


図 6. 1 7  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=12.5$ ) の渦度の振動 1 周期間の時間変化

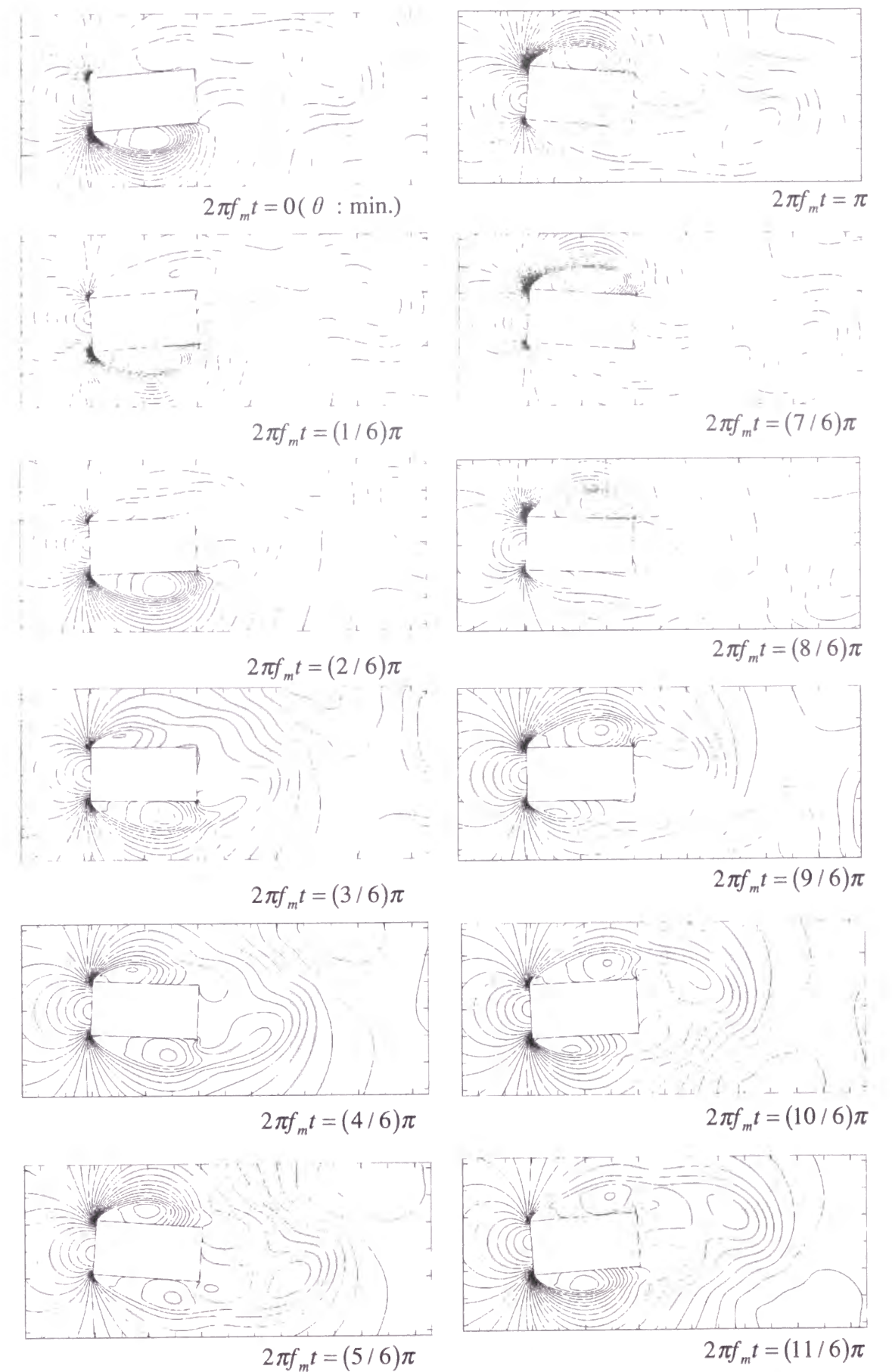


図 6. 1 8  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=12.5$ ) の圧力の振動 1 周期間の時間変化



上げ時  $(6/6)\pi$  に最も圧力が回復しており、頭下げ移行時に断面が  $0^\circ$  付近  $(9/6)\pi$  で最も圧力が低い (図 6. 14 b).  $Ur=12.5$  ではほぼ最大頭上げ時付近  $(7/6)\pi$  で最も圧力が低く (図 6. 14 d), 最大頭下げ時付近  $(1/6)\pi$  に最も圧力が回復している (図 6. 14 c).

図 6. 15 ~ 図 6. 18 には渦励振時 ( $Ur=6$ ) およびねじれフラッター時 ( $Ur=12.5$ ) の振動 1 周期間の断面近傍の瞬間渦度コンターと圧力コンターを示す。渦度コンターを見ると、渦励振時には断面の直接背後で渦が巻き込んでおり、その渦が順次後流に放出されている。これは静止時の後流渦のパターン (図 3. 7 d) とは大きく異なる。一方、ねじれフラッター時には渦励振時とは異なり、明瞭な巻き込みはなく、断面から遠い位置で渦が形成され順次放出されている。

#### 6. 4. 3 $B/D=4$ 断面のねじれ強制加振時の非定常空気力

$B/D=4$  は周期的再付着型の断面に属する。周期的再付着型断面は空力弾性的にはねじれフラッターが発現する点で興味深い。前述の  $B/D=2$  もねじれフラッターを発現する点では同じであるが、 $B/D=4$  は再付着型でありその意味で  $B/D=2$  とは異なる性質を示す。Tacoma Narrows 橋をはじめとする実際の橋梁断面は再付着型のものも多い。Tacoma Narrows 橋は H 型断面であるが、その辺長比は  $B/D=5$  でありこの断面辺長比の部類に属することから本節で示す  $B/D=4$  は実際の橋梁断面の例としても興味ある辺長比であるといえる。以下本節では  $B/D=4$  のねじれの空力弾性挙動に対する  $k$ - $\varepsilon$  モデルの再現性を調べるためにまずねじれ強制加振時の非定常空気力を考察する。

図 6. 19 にはねじれ強制加振時の非定常空気力係数を示す。加振振幅は鷺津らの実験結果にあわせて  $3.82^\circ$  ( $0.067\text{rad}$ ) とした。励振力に直接関係がある速度同相成分 (図 6. 19 b) を見ると、その変化は、低無次元風速域では負から高無次元風速域では正へと無次元風速にしたがい単調に変化している。それに応じて加振回転角変位と空力モーメントの加振振動数成分の位相差 (図 6. 19 c) も単調に負から正へと変化している。

この加振振幅では  $Ur > 20$  において速度同相成分は正の値を示しておりねじれフラッターの発現の可能性を示している。本解析結果は速度同相成分に関しては無次元風速の全般で実験値とよく一致している。空力モーメントの加振振動数成分の変位同相成分 (図 6. 19 a) は  $Ur < 15$  で実験結果とのずれが見られる。それに対応するように位相差 (図 6. 19 c) も低無次元風速域で実験結果との差異が見られる。低無次元風速域では加振周期が短いため、解析における時間刻みの影響が考えられる。同図には時間刻み値  $\Delta t$  を通常の  $1/5$  ( $\Delta t=1/2000$ ) にした場合の解析結果を  $Ur=4$  について示すが、変位同相成分の値はほとんど変わっていない。したがって低無次元風速域における実験結果との差異は時間刻みの不備ではないと考えられる。ちなみに 3 次精度風上差分のみを用いた 2 次元解析による  $B/D=5$  の強制加振解析結果<sup>14)</sup>でも同

様な傾向が示されている。本解析やこの解析では低無次元風速域では側面上に非常に強い渦度を有する前縁はく離渦が見られるがこの際の拡散効果が十分でない結果とも考えられる。

図 6. 20 には強制加振時の空気力波形および流れのパターンを示す。ねじれの強制加振時と特徴としては並進の強制加振時に、高無次元風速域において見られた Karman 渦放出が見られず、したがって空気力にも加振振動数成分のみしか現れていない点である (例えば同図  $Ur=30$  の場合)。

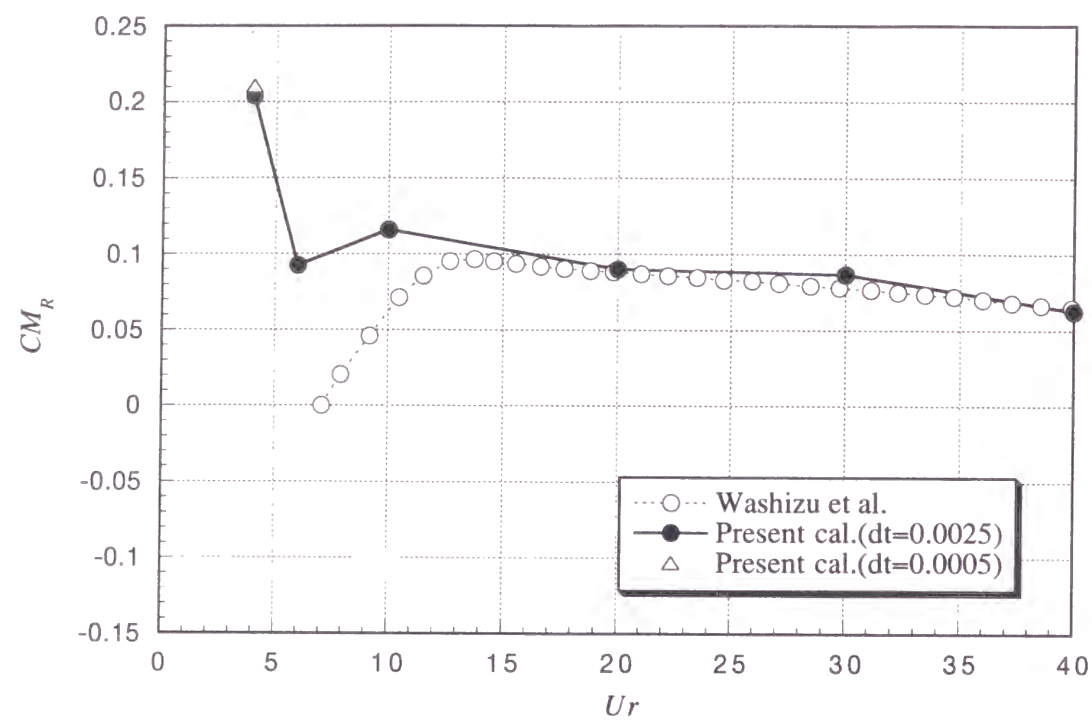
本振動実験結果のねじれの渦励振のピークはほぼ  $Ur=5.67$  で見られた。図 6. 21 には  $Ur=5.67$  における側面上の非定常風圧分布を示す。同図には比較のため白石らの風洞実験結果および瀬戸らの 3 次元数値解析結果<sup>10)</sup>を示す。加振振幅は  $0.009\text{rad}$  である。位相差は前縁部と後縁部で  $390^\circ$  あり、振動約 1 周期強の開きがある。本解析結果は風洞実験結果および 3 次元解析による結果とよく一致している。同図 (b) には非定常空力モーメント  $Cp_l \times r$  を示す。側面風下側で正の値になっており風下側が励振力となっていることがわかる。図 6. 22 には  $Ur=24$  における非定常風圧分布を示す。加振振幅は  $0.07\text{rad}$  である。この無次元風速は図 6. 2 に示すように、ねじれフラッターが発現している風速である。 $Ur=5.67$  と異なるのは位相の分布で、前縁と後縁では約  $180^\circ$  の開きがあり、ちょうど振動周期の  $1/2$  となっており、久保らが指摘しているとおり  $n=0.5$  に近い値となっている。一方、励振モーメントは側面風下側に存在しており、この点に関しては  $Ur=5.67$  と同様である。

#### 6. 4. 4 ねじれ 1 自由度弾性支持された $B/D=4$ 断面の解析

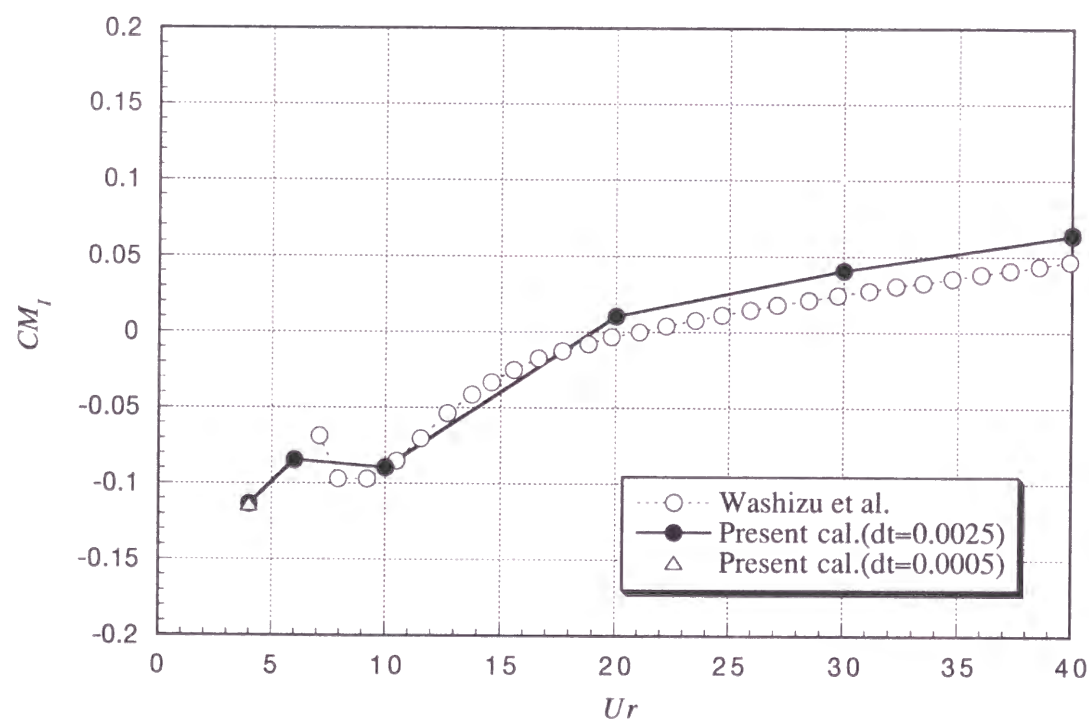
図 6. 23 には  $B/D=4$  のねじれ 1 自由度の自由振動時の本解析結果と本実験結果の比較を示す。Scruton 数は  $Sc=2I \delta / (\rho B^2 D^2)=5.3$  ( $I$ : 単位長さあたりの慣性モーメント) とした。減衰定数は  $h=0.283\%$  とした。解析結果では実験結果に見られる  $Ur=5$  付近で見られる渦励振と、 $Ur=16$  付近から立ち上がるねじれフラッターが再現されている。実験では減衰定数は図 6. 24 に示すように振幅依存性が見られたが、解析では一定値として与えた。本解析結果は本実験結果を概ね再現している。特に渦励振に関しては本実験結果とよく一致している。ただしねじれフラッターに関しては  $Ur=20$  での急峻な立ち上がりや  $U \geq 20$  では本実験結果とよく一致しているが、ねじれフラッターの立ち上がり部分が、本実験結果では  $Ur=16$  であるのに対して  $Ur=20$  となっている点異なる。この点に関しては質量慣性モーメントや減衰定数の設定の微妙な差違によって生じたものと考えられる。

図 6. 25 ~ 図 6. 27 には渦励振時 ( $Ur=5.67$ , 振幅  $0.02\text{rad}$ ) の、図 6. 28 ~ 図 6. 30 にはねじれフラッター時 ( $Ur=22$ , 振幅  $0.11\text{rad}$ ) の振動 1 周期間の渦度、流線および圧力を示す。渦励振時 ( $Ur=5.67$ ) の流線のコンター (図 6. 26) からは断面背後に後縁 2 次渦の形成が明瞭に認められ、前縁ではく離し側面を流下する渦と後縁 2 次渦とが振動 1 周期を要し

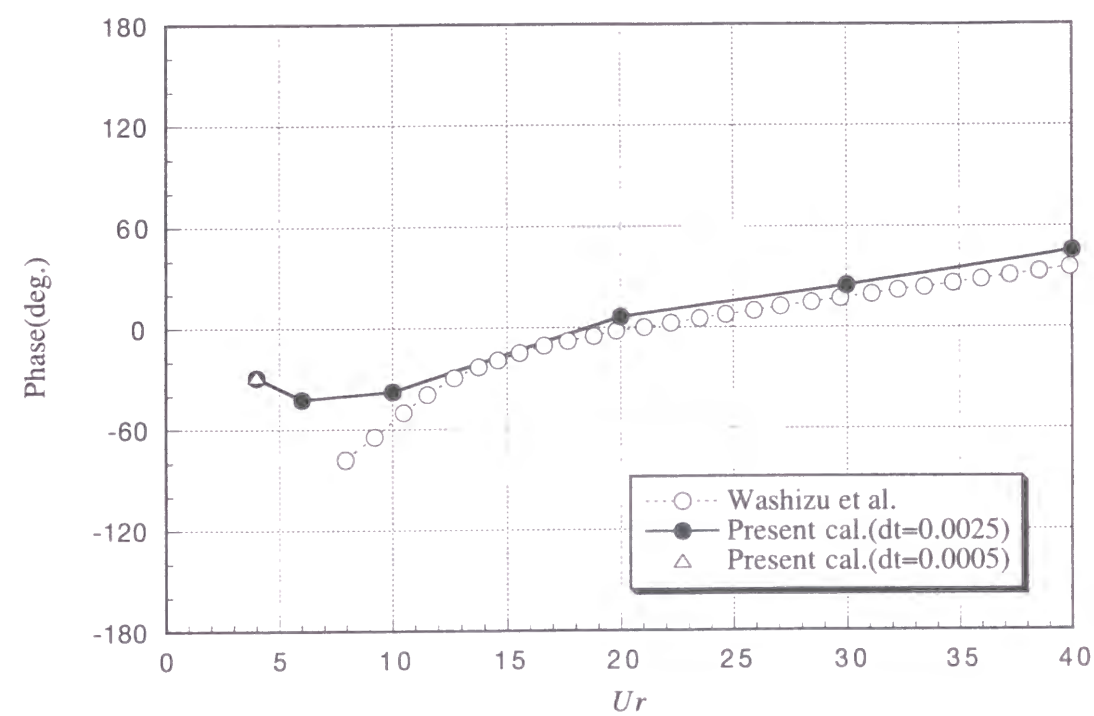




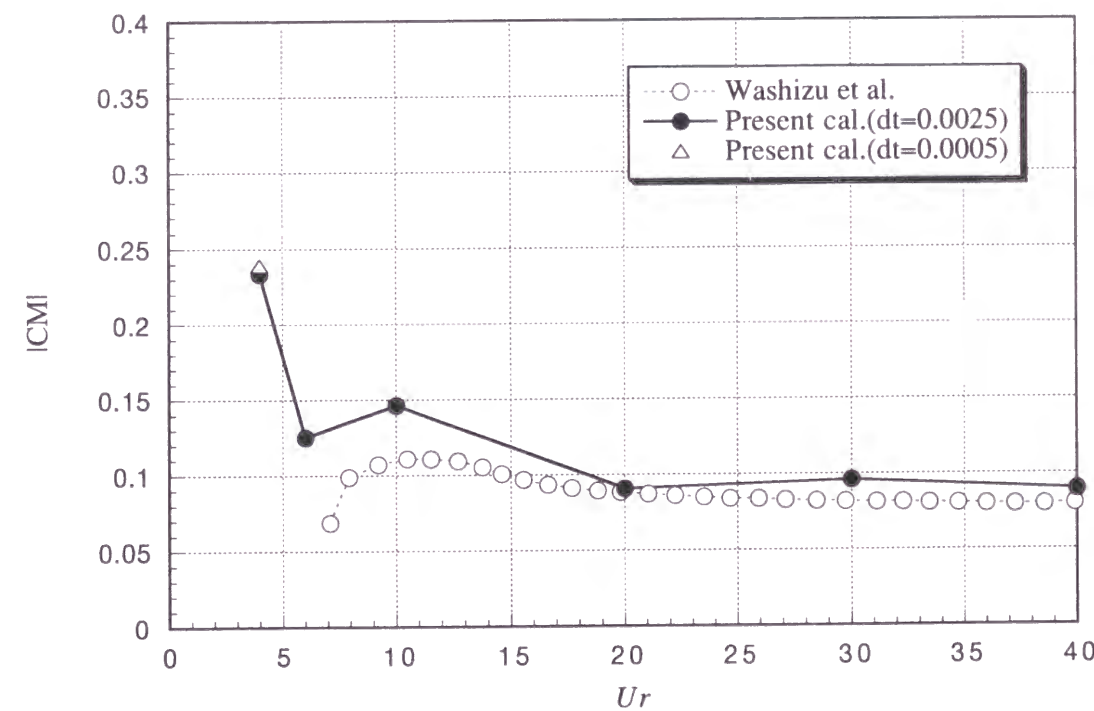
(a)変位同相成分



(b)速度同相成分



(c)Phase



(d)絶対値

図 6. 1 9  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の非定常空気力係数

図 6. 1 9  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の非定常空気力係数

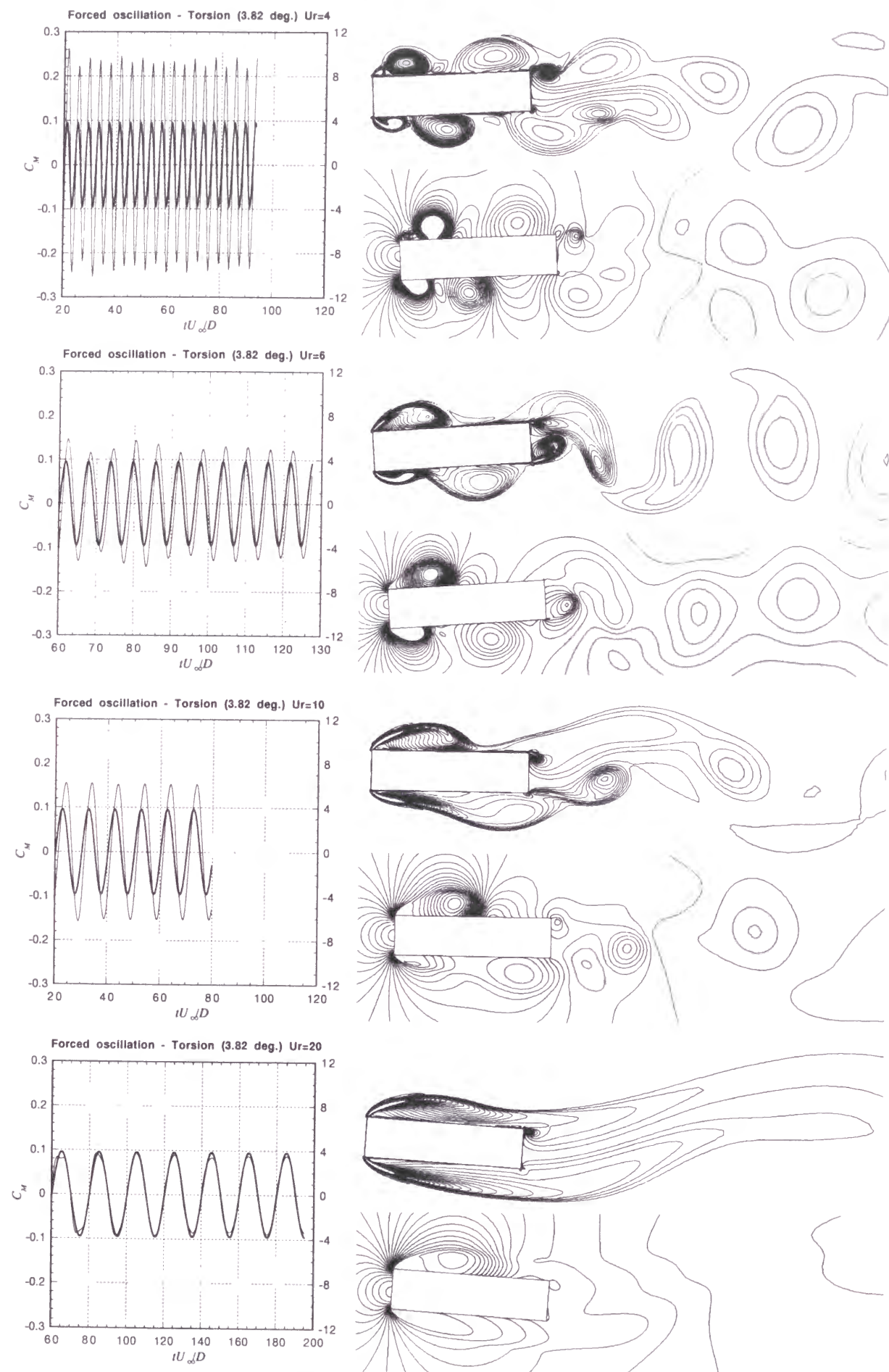


図 6. 2 0  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列

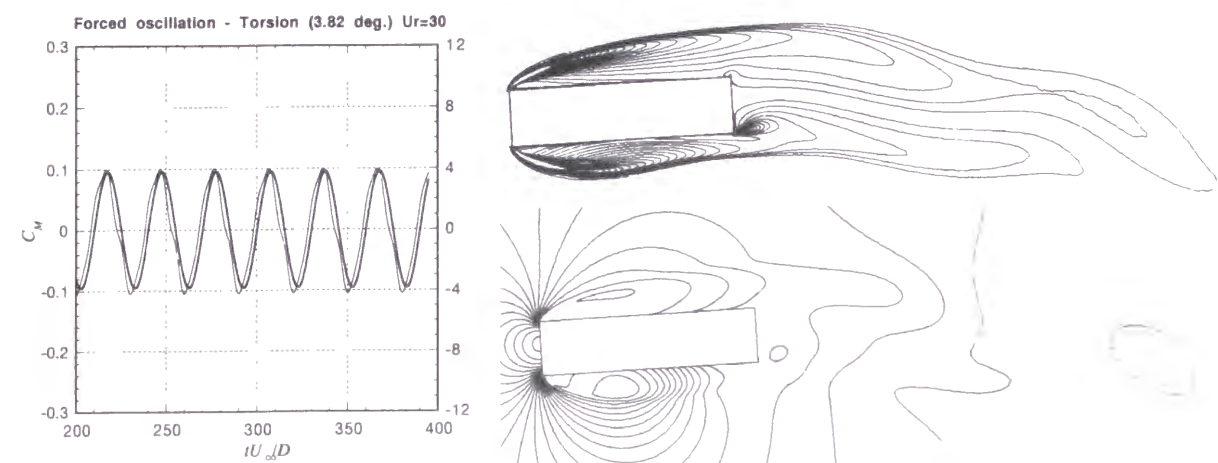
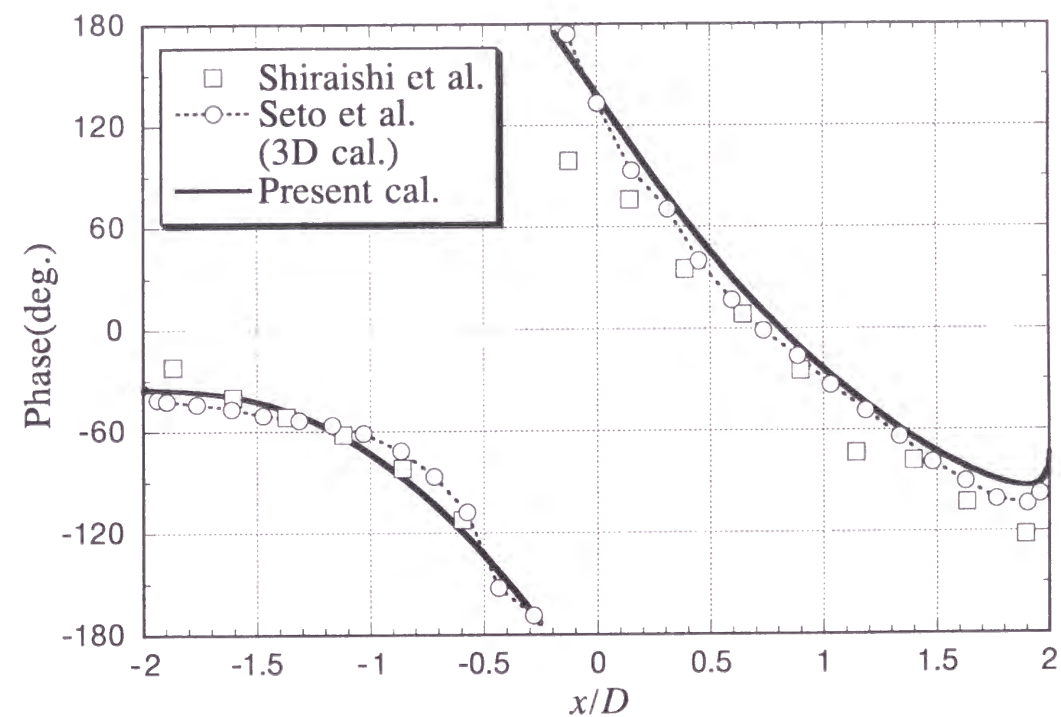
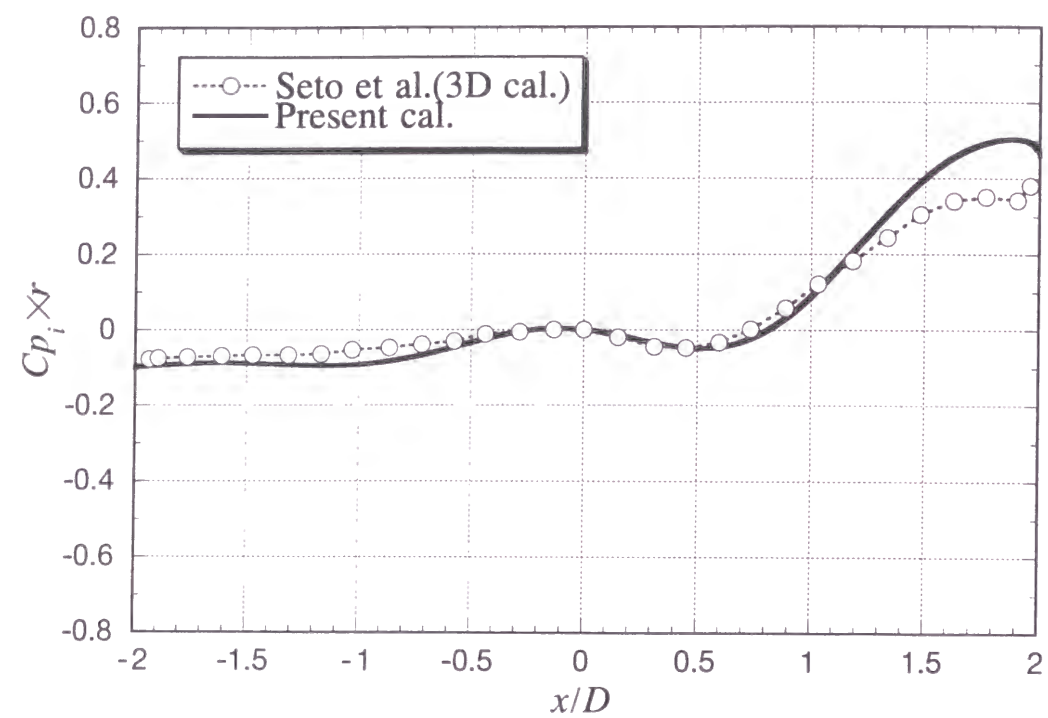


図 6. 2 0  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時 (加振振幅  $3.82^\circ$ ) の渦度, 圧力, 空気力の時系列

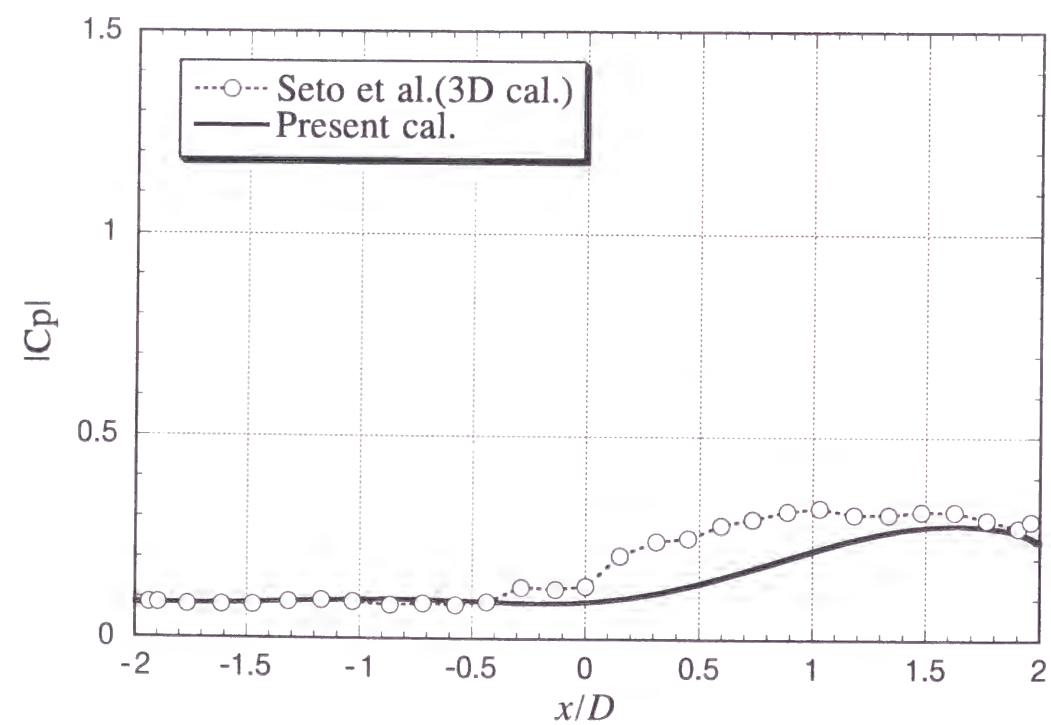


(a)Phase

図 6. 2 1  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時 ( $Ur=5.67$ , 加振振幅  $0.009\text{rad}$ ) の非定常風圧力分布

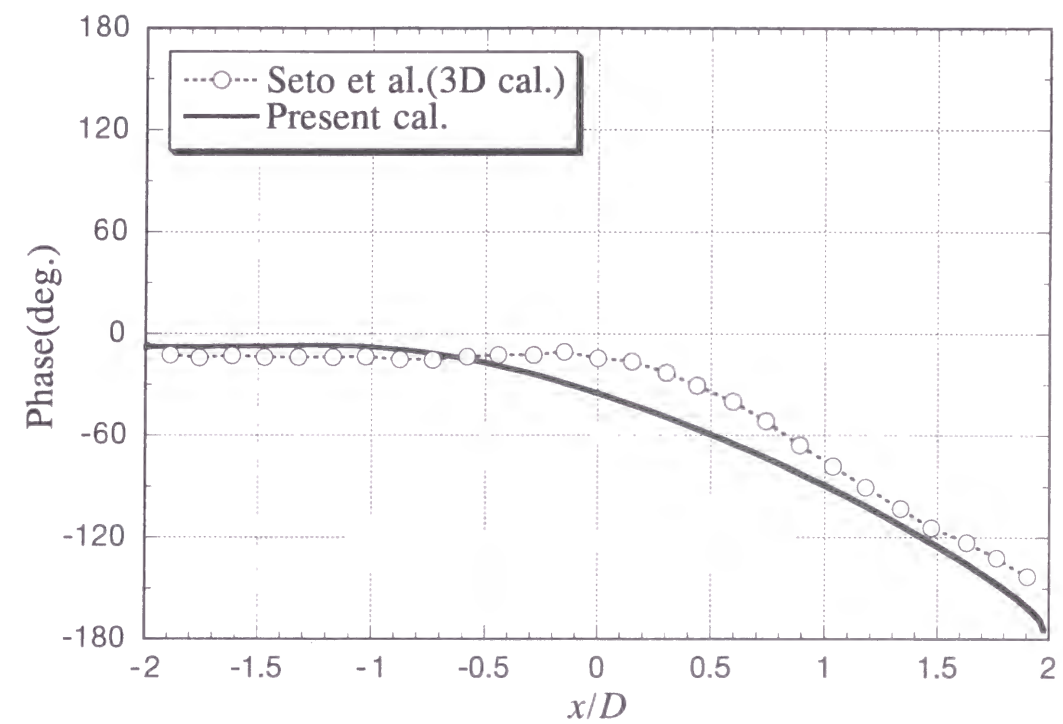


(b) 非定常空力モーメント  $Cp_i \times r$

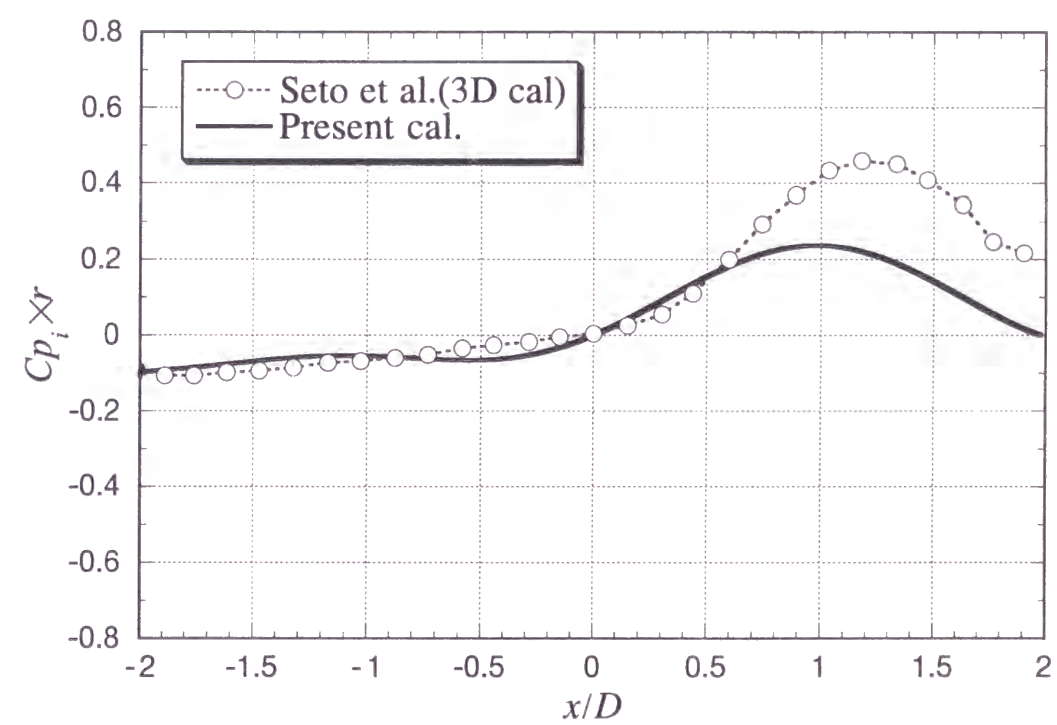


(c) 絶対値

図 6. 2 1  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時( $Ur=5.67$ , 加振振幅  $0.009\text{rad.}$ )の非定常風圧力分



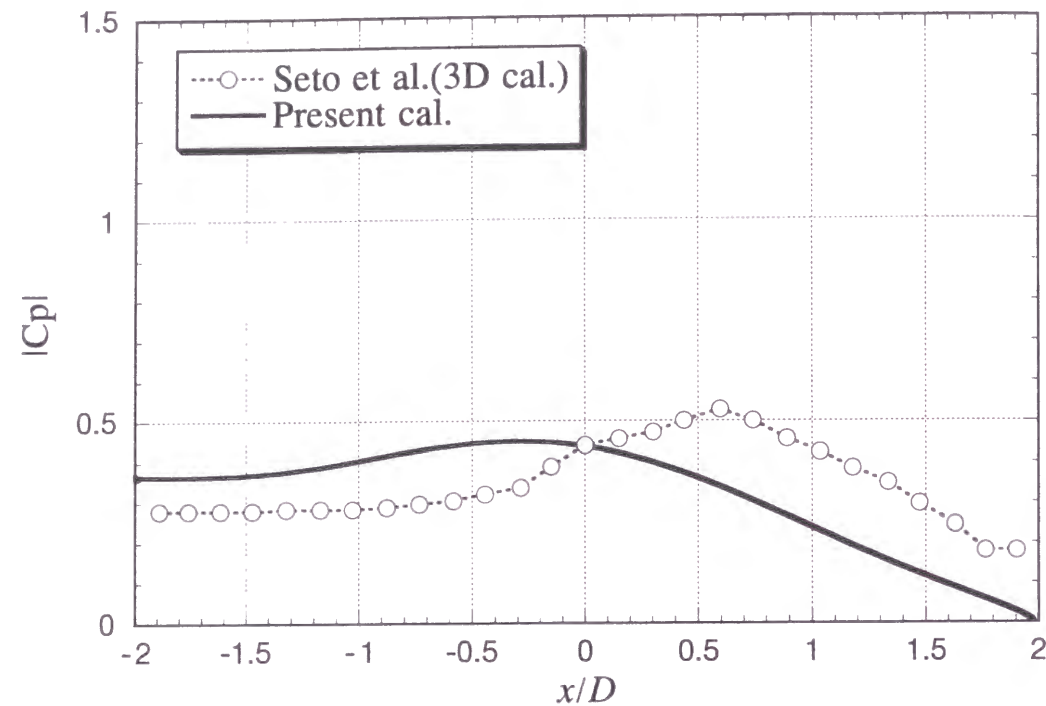
(a) Phase



(b) 非定常空力モーメント  $Cp_i \times r$

図 6. 2 2  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時( $Ur=24$ , 加振振幅  $0.07\text{rad.}$ )の非定常風圧力分布





(c)絶対値

図6. 2 2  $B/D=4.0$  ねじれ強制加振時( $Ur=24$ , 加振振幅  $0.07\text{rad}$ .)の非定常風圧力分布

て規則的に融合し後流に放出されている様子が認められる。

ねじれフラッター時 ( $Ur=22$ ) の流線コンター (図6. 2 9) から、前縁で形成される渦の側面上の流下が明瞭に認められる。断面が頭上げに移行する過程で前縁ではなく離渦のはく離バブルの形成が見られる。最大頭上げ時から頭下げに移行する過程でこの渦は側面を流下している。

図6. 3 1 には振動1周期間の上側面の風圧分布の変化を示す。渦励振時 ( $Ur=5.67$ ) ではおおよそ  $-1.2 < Cp < 0$  で変動しているのに対し、ねじれフラッター時 ( $Ur=22$ ) では  $-1.8 < Cp < 0$  と負圧側に大きく変動している。

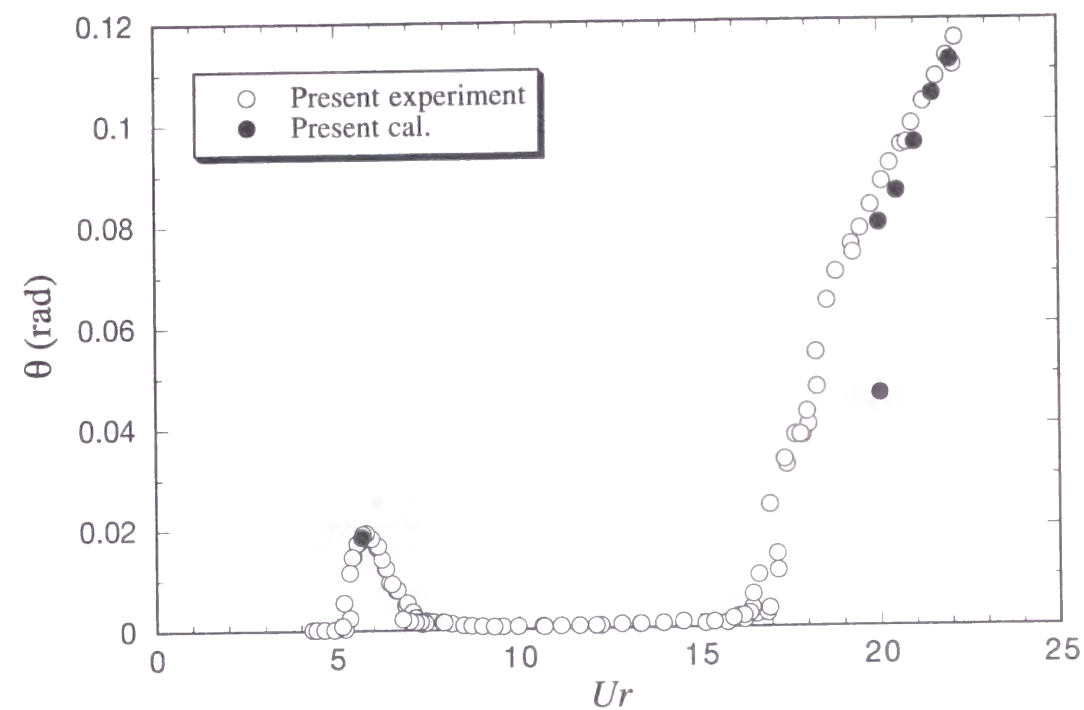


図6. 2 3  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時の解析結果と実験結果の比較

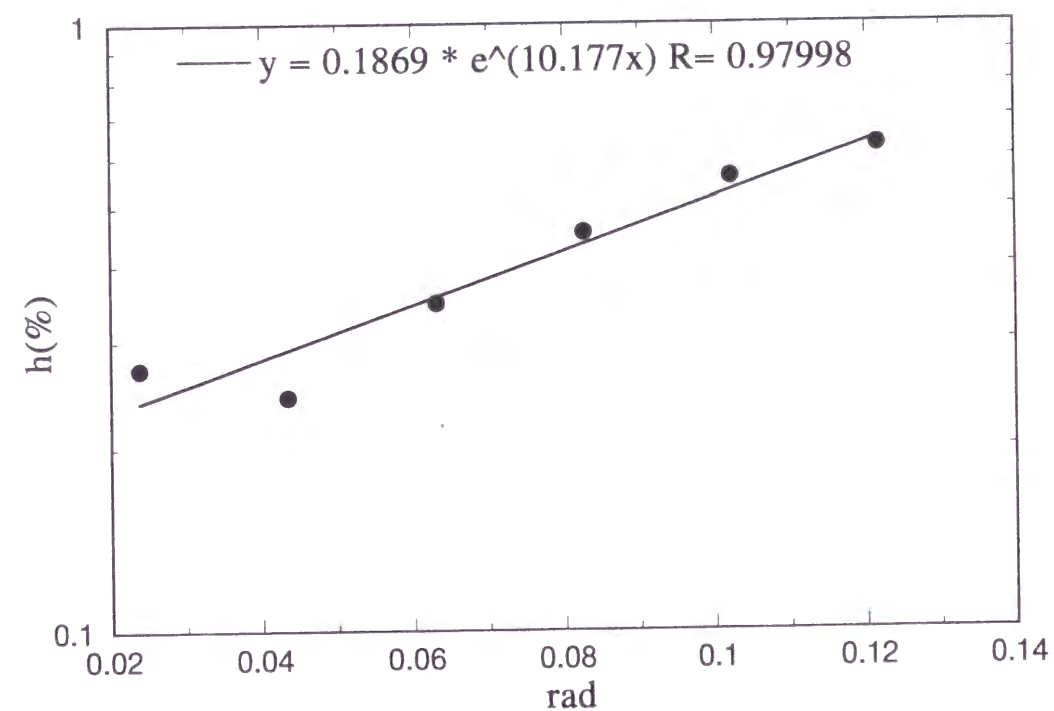


図6. 2 4  $B/D=2.0$  ねじれ自由振動実験時の減衰定数の振動振幅に対する変化



図6. 25  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=5.67$ ) の渦度の振動1周期間の時間変化

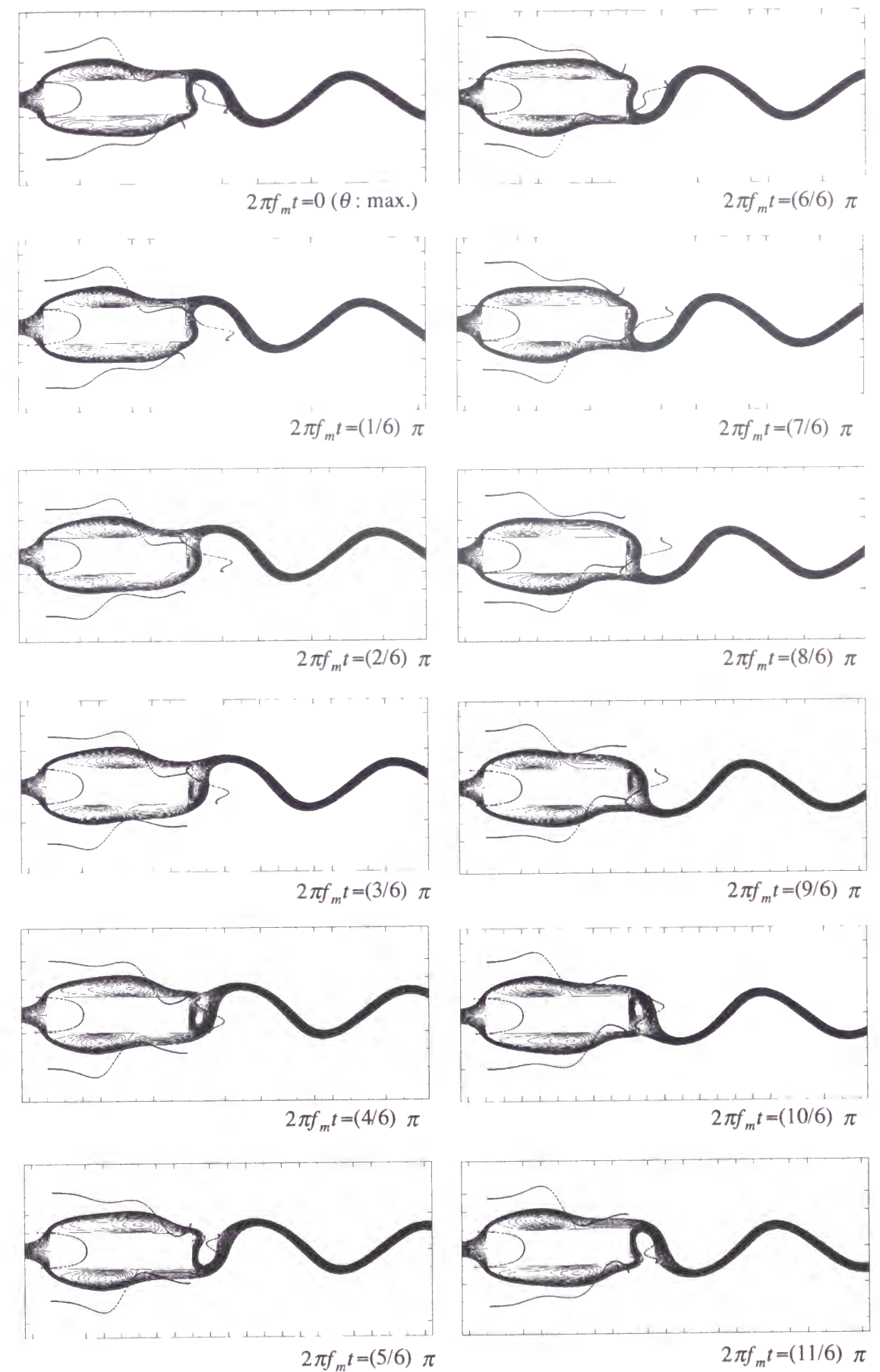


図6. 26  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=5.67$ ) の流線と圧力分布の1周期間の時間変化



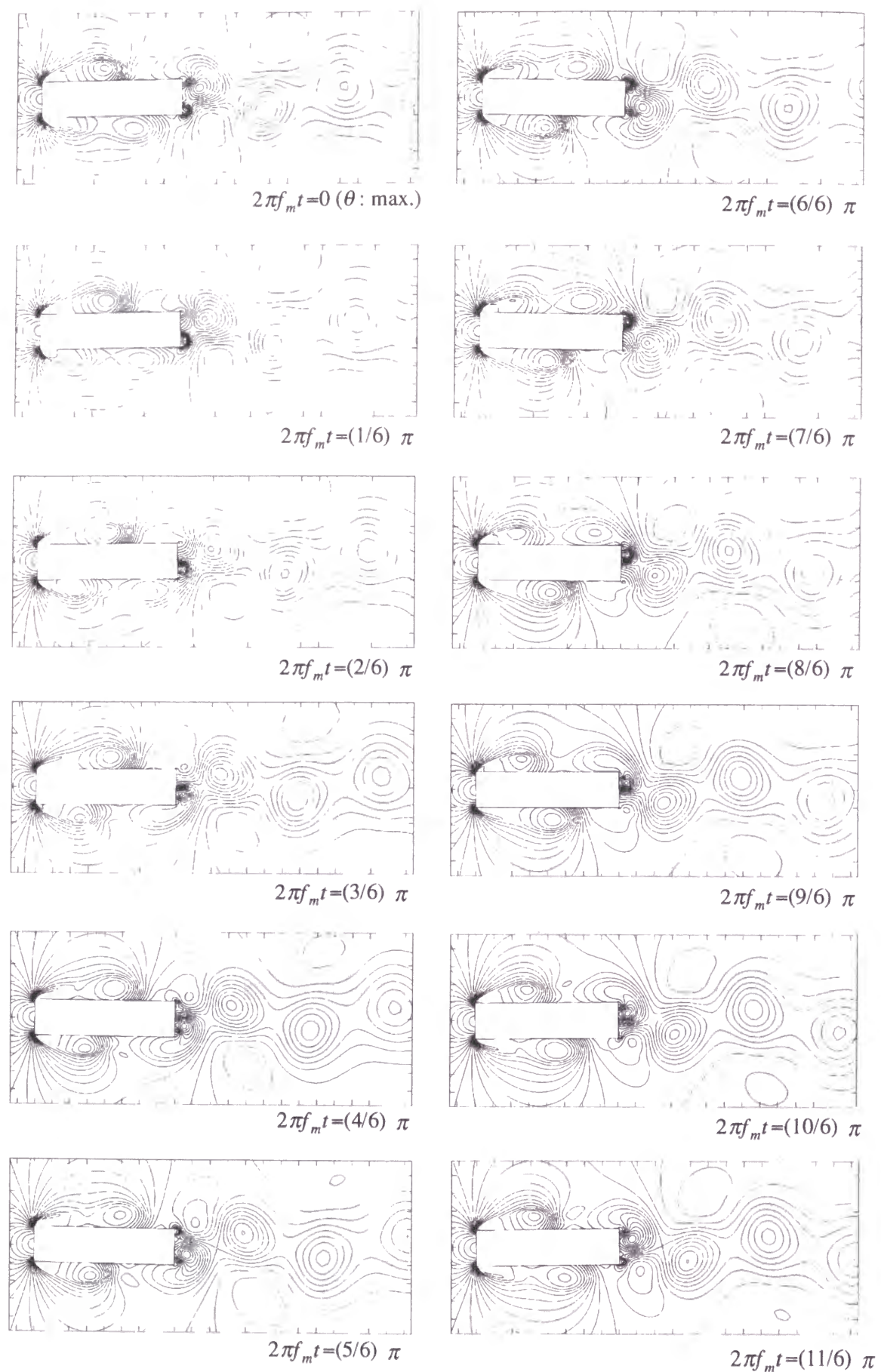


図6. 27  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=5.67$ ) の圧力の振動1周期間の時間変化

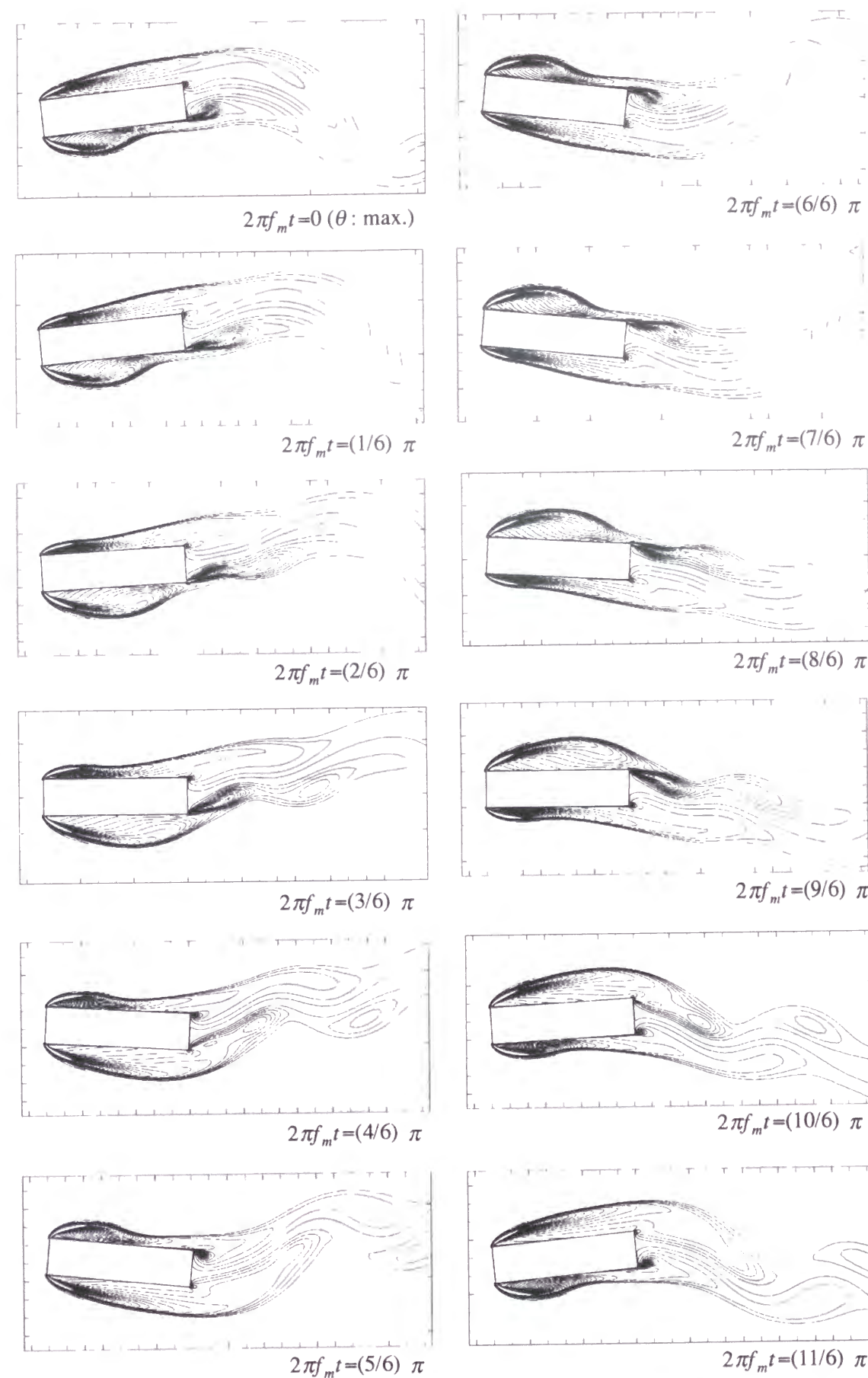


図6. 28  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=22$ ) の渦度の振動1周期間の時間変化

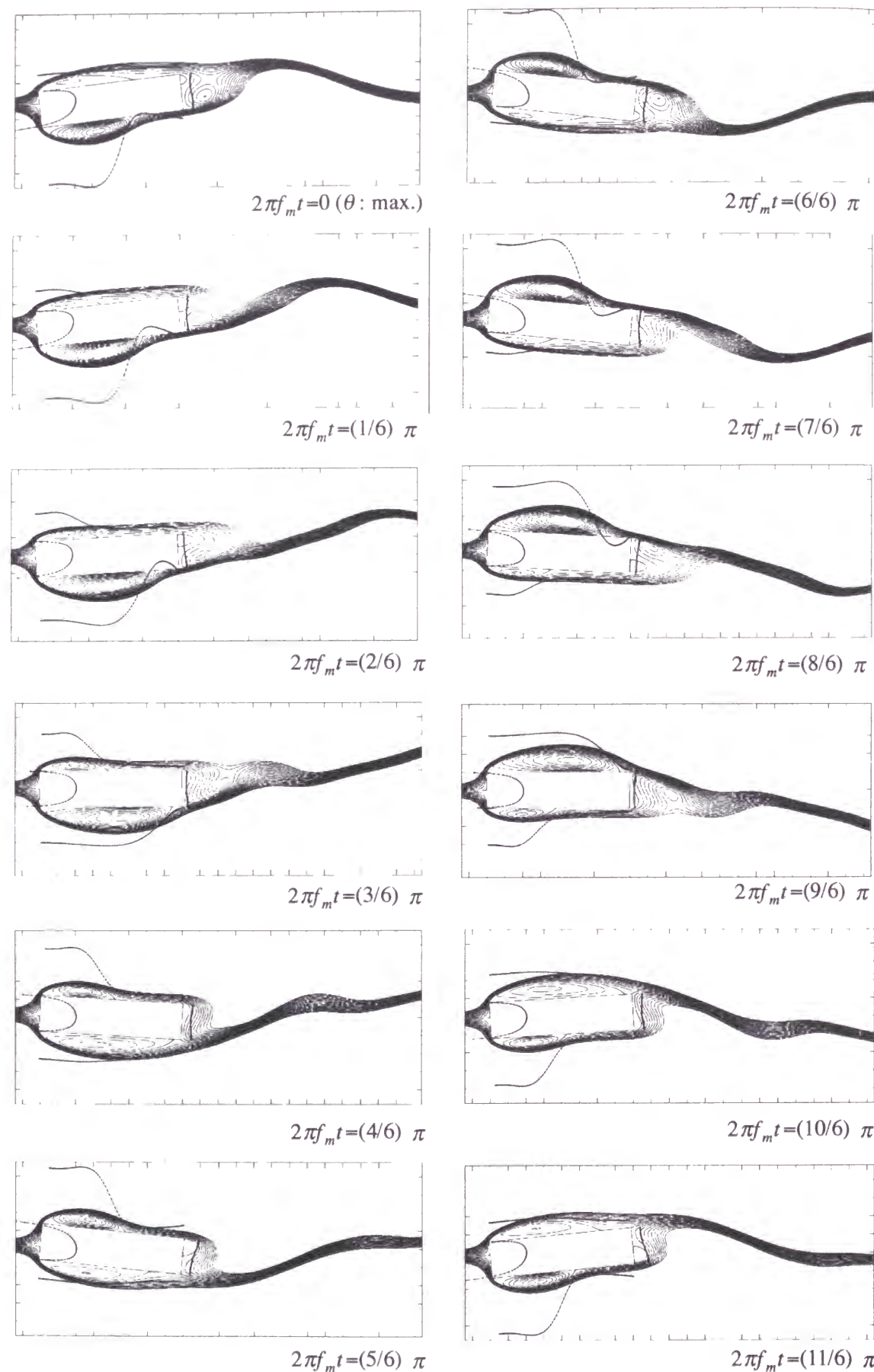


図6. 29  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=22$ ) の流線と圧力分布の振動1周期間の変化

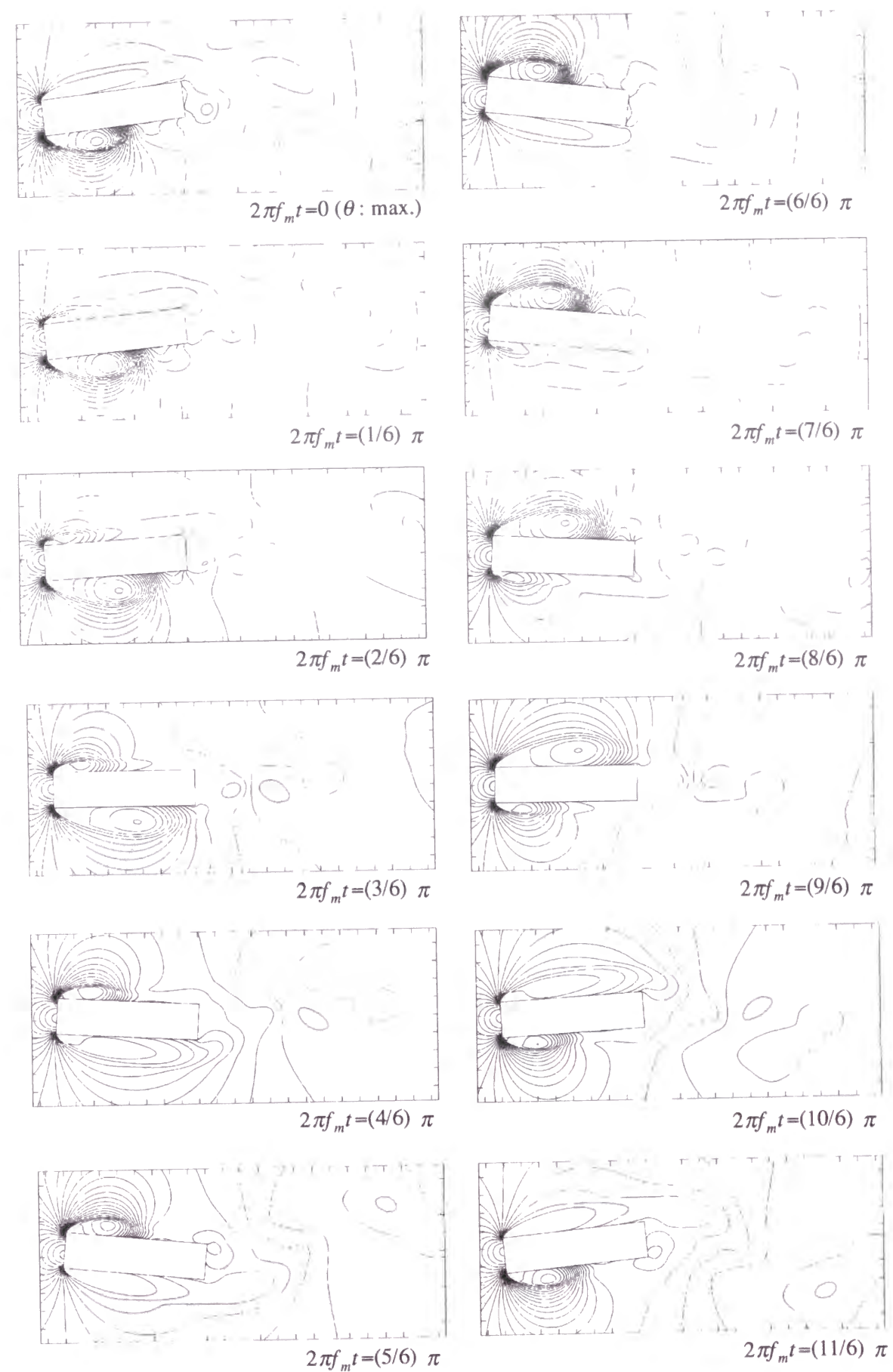
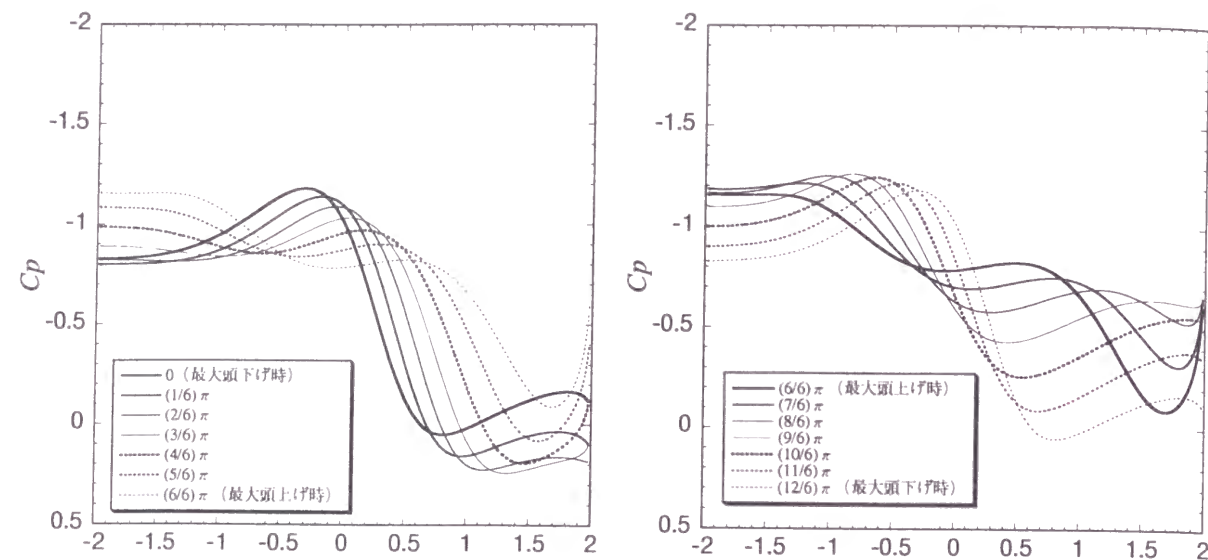


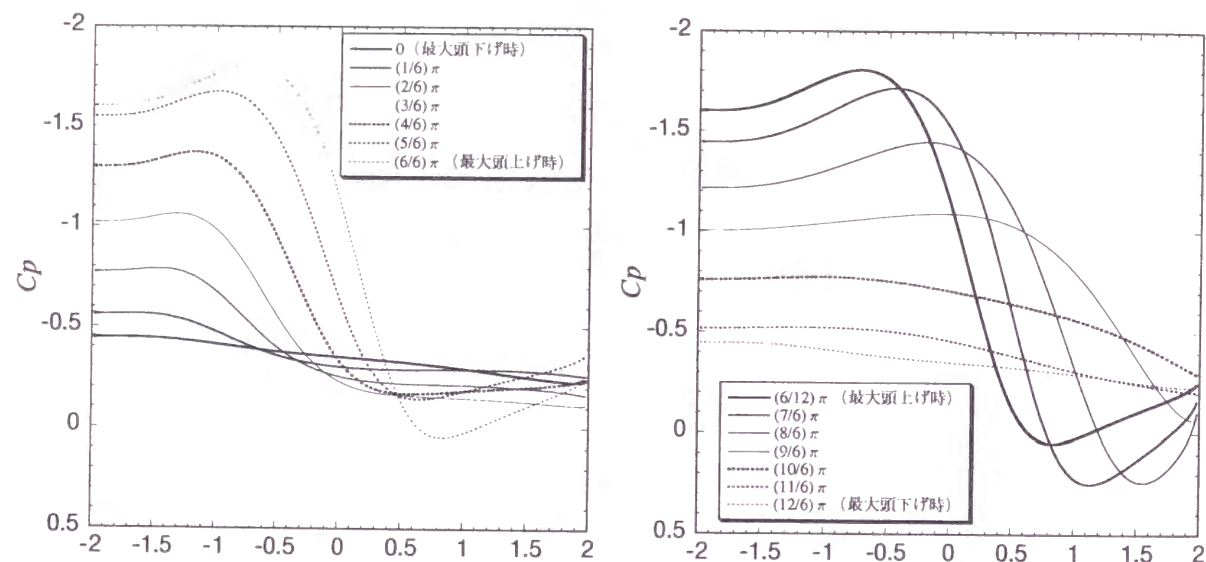
図6. 30  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時 ( $Ur=22$ ) の圧力の振動1周期間の時間変化





(a)  $Ur=5.67$  (頭上げ移行時)

(b)  $Ur=5.67$  (頭下げ移行時)



(c)  $Ur=22$  (頭上げ移行時)

(d)  $Ur=22$  (頭下げ移行時)

図 6. 3 1  $B/D=4.0$  ねじれ自由振動時の側面上の風圧分布

## 6. 5 結論

本章では矩形断面のねじれ振動について考察した. まずはじめにねじれ 1 自由度の振動実験を  $2 \leq B/D \leq 8$  の辺長比を有する矩形断面柱に関して行った. 次に  $k-\epsilon$  モデルのねじれ振動への適用性に関して検証を行った. 検証は  $B/D=2$  および  $B/D=4$  の断面について非定常空気力および自由振動の各々について行った. その結果は以下のとおりである.

(1) 周期的再付着型矩形断面のねじれ振動は (i) 自己励起型, (ii) Karman 渦によるもの, (iii) ねじれフラッターの 3 種類である.

(2)  $B/D=2$  断面に関して,  $Ur=6$  付近から生じる渦励振はスプリッター板を後流に挿入した場合に消失することから, 前縁はく離渦によるものではないことが考えられ, Strouhal 数の 2 倍の振動数に対応した渦励振であると考えられる.

(3) 本数値解析による強制加振時の非定常空気力および非定常風圧分布は, 既往の風洞実験結果および 3 次元数値解析結果と定量的にもよい一致を示した.  $B/D=4$  では渦励振時もねじれフラッター時も風下側が励振モーメントとして寄与している.

(4) 本数値解析結果では,  $B/D=2$  断面で無次元風速が  $Ur > 20$  の領域で加振振幅が小さい場合, 励振力とはならないことが認められた. このことは本自由振動実験において同じ風速領域で 0 発振では応答は立ち上がらず, 大きな初期振幅を与えたときのみ応答が立ち上がったこととよく対応している. このことは従来指摘されているねじれフラッターの限定的性質と関与していると考えられる.

(5) 本解析によるねじれ 1 自由度の解析では渦励振とねじれフラッターが定量的にも満足な精度で再現された. ただし  $B/D=4$  のねじれフラッターの立ち上がりに関しては本実験結果に比べてやや無次元風速が高い位置になった.

## 参考文献

- 1) 吉村健, 三宅昭春, 平山智良, 赤松輝雄: 扁平矩形断面柱のねじれの渦励振, 第9回風工学シンポジウム論文集, 1986, 157-162
- 2) 白石成人, 松本勝: 充腹構造断面の渦励振応答特性に関する研究, 土木学会論文報告集, 第322号, 1982.6, 37-50
- 3) 久保喜延, 加藤九州男, 宮地真一: 扁平H-型断面柱の非定常表面圧力分布特性, 第8回風工学シンポジウム論文集, 1984, 291-296
- 4) 久保喜延, 加藤九州男, 宮地真一: 扁平構造断面柱の発振風速推定式について, 第9回風工学シンポジウム論文集, 1986, 169-174
- 5) Miyata, T., Miyazaki, M. and Yamada, H. : Pressure distribution measurements for wind induced vibrations of box girder bridges, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* (1983) 14, 223-234.
- 6) 松本勝, 白石成人, 白土博通: 主流方向脈動流中における Bluff Body の空力特性, 第9回風工学シンポジウム論文集, 1986, 175-180
- 7) 松本勝, 白石成人, 白土博通, 平井滋登, 伊藤裕一, 重高浩一: H型断面柱のねじれフラッター特性に関する研究, 第11回風工学シンポジウム論文集, 1990, 251-256
- 8) 松本勝, 市川靖生, 白土博通, 藤井大三, 大東義志: H型構造基本断面の風速限定型ねじれフラッター振動の発生機構に関する基礎的研究, 第14回風工学シンポジウム論文集, 1996, 293-298
- 9) 鷺津久一郎, 大屋昭男, 大築志夫, 藤井邦雄: 箱型模型の空力弾性特性に関する風洞実験, 構造物の耐風性に関する第4回シンポジウム, 1976, 191-198
- 10) 瀬戸強士, 伊藤嘉晃, 田村哲郎: ねじれ強制振動時における長方形柱の空力特性に関する3次元解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1997, 197-198
- 11) Nakamura, Y. and Yoshimura, T. : Flutter and vortex excitation of rectangular prisms in pure torsion in smooth and turbulent flows, *J. of Sound and Vibration* (1982) 84(3), 305-317
- 12) Matsumoto, M., Daito, Y., Yoshizumi, F., Ichikawa, Y. and Yabutani, T. : Torsional flutter of bluff bodies, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 69-71 (1997) 871-882
- 13) Nakamura, Y. and Mizota, T. : Torsional flutter of rectangular prisms, ASCE, EM2, 1975, 125-142
- 14) Tamura, T. and Kuwahara, K. : Numerical study on aerodynamic instability of oscillating rectangular cylinders, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 41-44 (1992) 253-254

## 第7章 付着型断面および平板の空気力評価への適用性の検討

### 7. 1 概要

本章では矩形断面以外の断面形状への $k-\epsilon$ モデルの適用を検討する。矩形断面では流れのはく離点は断面前縁部であり、はく離せん断層が側面にわたって発達する。このため、断面にはこのはく離せん断層の不安定性に伴う種々の流体力が励起されることになる。実際の構造物の断面、特に橋梁断面では矩形断面を用いることは意匠上の観点や、上述のような流体力学的観点から必ずしも採用されることはない。はく離を小さく抑えるために、流線形に近い形状がとられる。よく採用されるのがフェアリングである。この場合、流れは前縁でははく離せず、断面に沿って流れるため、この断面はいわゆる付着型断面に属する（白石・松本 1983）<sup>1)</sup>。また、一般的に一樣流中において見られた渦励振応答は乱流中においては抑制されるが、扁平六角形断面は乱流中においても渦励振の応答が一樣流中の場合と比較して小さくならないということも報告されており（松本ら 1996）<sup>2)</sup>、この点でその他の形状と大きく異なり興味ある断面形状であるといえる。以下本章ではまず付着型断面の例として正三角形の両端フェアリングを有する扁平六角形断面を取り上げ、そのねじれ 1 自由度の空力振動が $k-\epsilon$ モデルによって再現されるかどうかを通して付着型断面への適用性を検証する。

次に本章では $k-\epsilon$ モデルの連成空気力評価への適用性の検討を行う。連成フラッターでは並進とねじれのそれぞれの運動によって励起される揚力とモーメントが励振力となる。数値解析によりこれらの連成振動時の連成振動を評価するためにはこれらの連成空気力の評価に対する検証が必要である。本章ではその対象として調和振動する平板をとりあげ、2次元振動翼理論による平板空気力（揚力およびモーメント）の理論値との比較を行う。

### 7. 2 扁平六角形断面

#### 7. 2. 1 実験結果

図 7. 1 には検討の対象とした断面と、 $B/D=3.5$ の矩形断面の風上および風下側に正三角形のフェアリングを有する扁平六角形断面（それぞれの頂点間を $B$ とすると $B/D=5.23$ ）である。同図には本風洞実験によるねじれ 1 自由度の場合の自由振動応答を○で示す。

本断面は比較的大振幅の渦励振が生じた。一方、計測した $Ur < 25$ までの領域においてはねじれフラッターの発現は見られなかった。

図 7. 2 に本実験の減衰定数の振幅による変化を示す。本実験では応答振幅により減衰定数の値が変化し、渦励振の最大振幅と微小振幅時とで減衰定数は 0.3 ~ 0.7% の開きがあった。



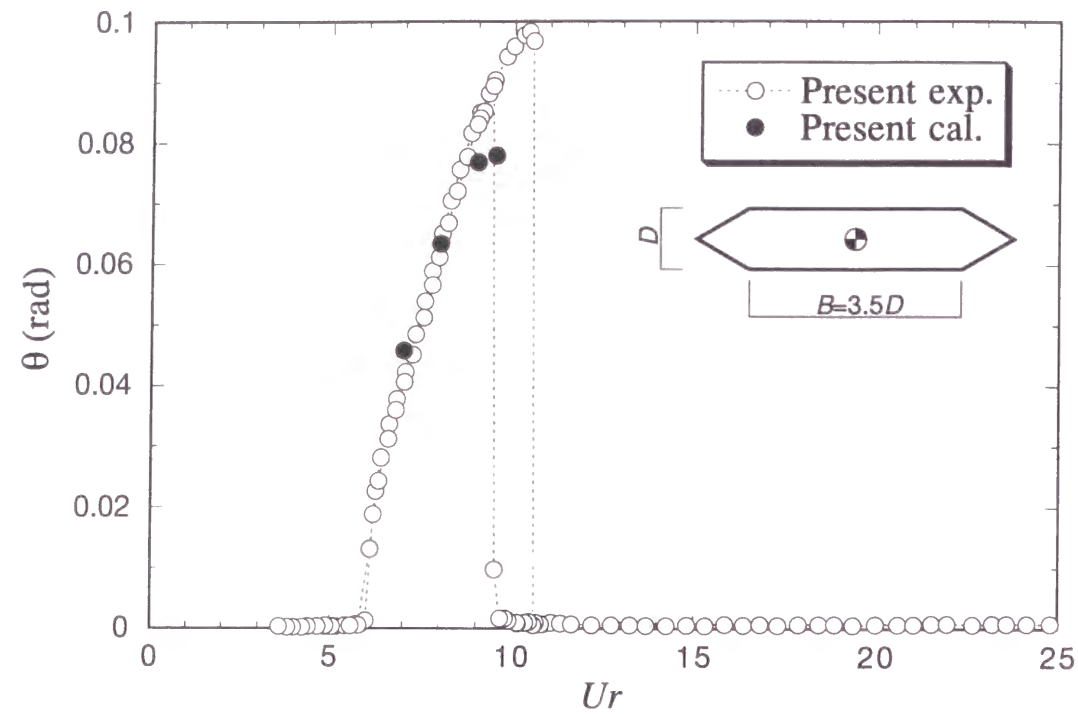


図 7. 1 扁平六角形断面の空力弾性応答

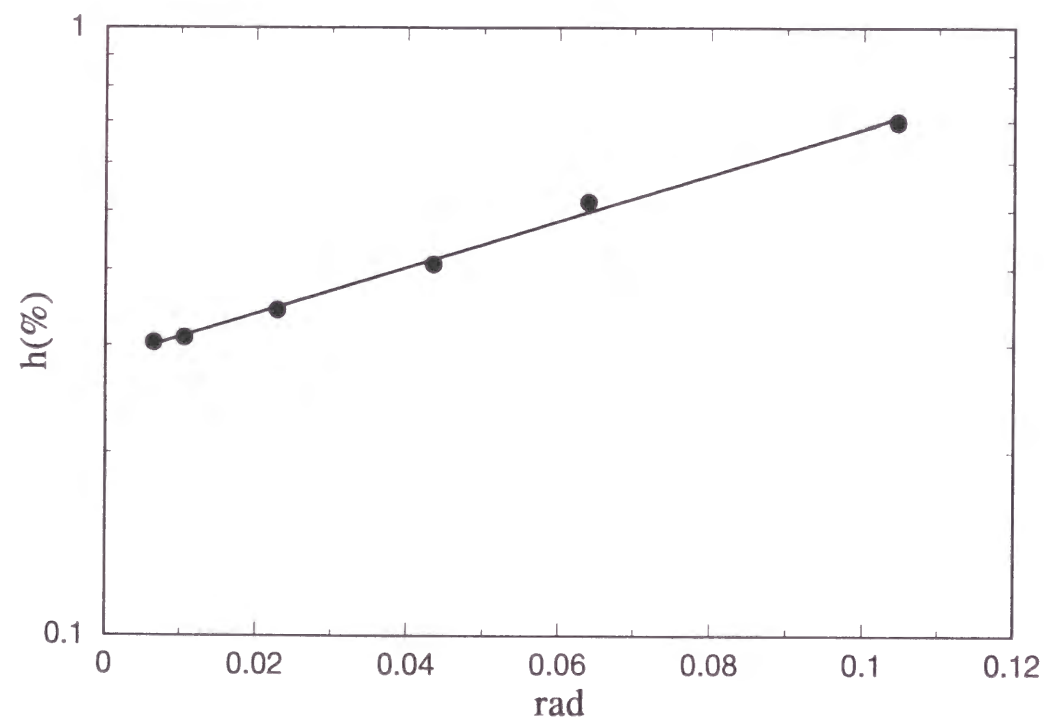


図 7. 2 扁平六角形断面のねじれ 1 自由度実験結果の減衰定数の振幅による変化

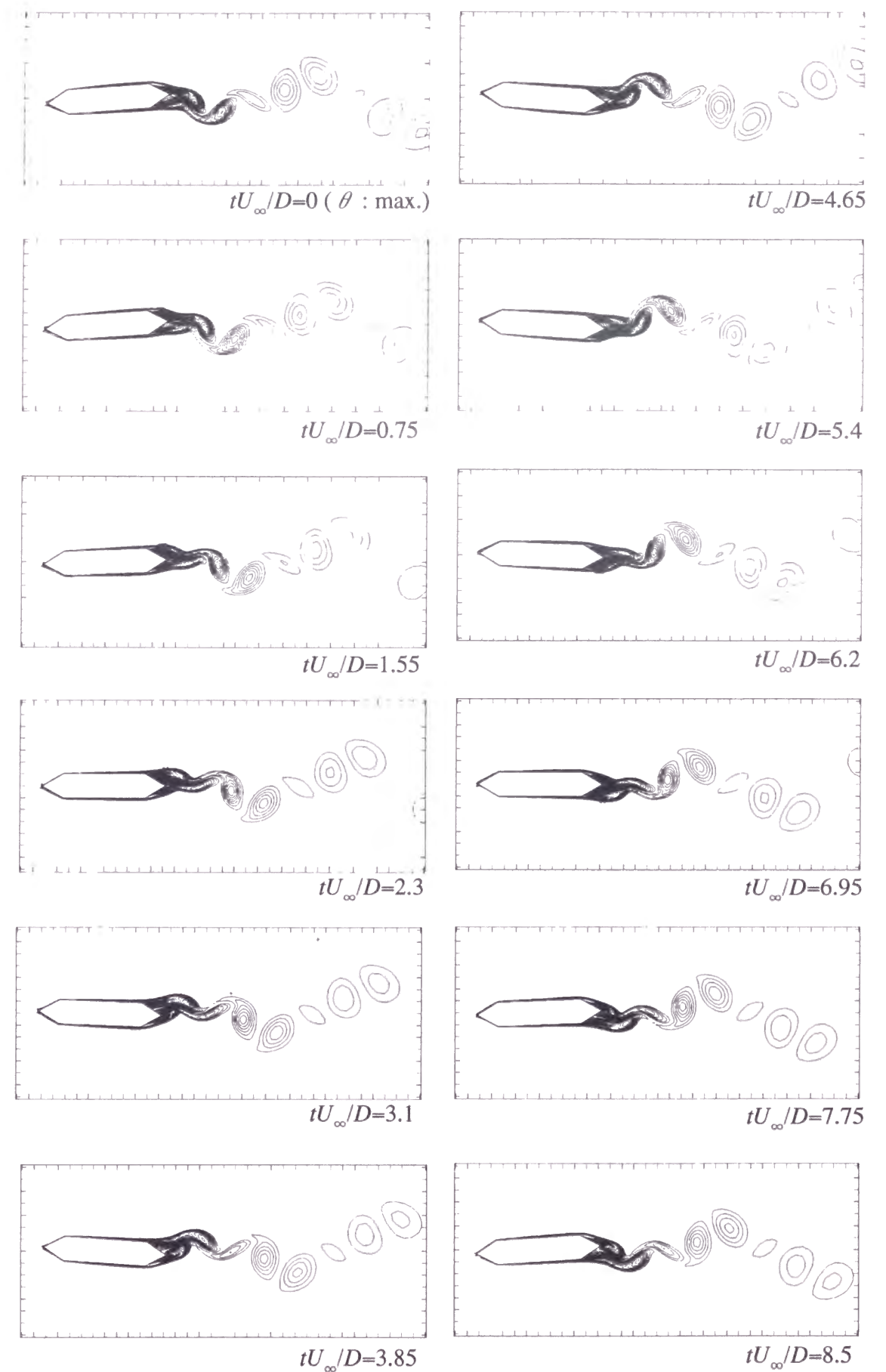


図 7. 3 扁平六角形断面のねじれ自由振動時 ( $Ur=9$ ) の渦度の振動 1 周期間の時間変化

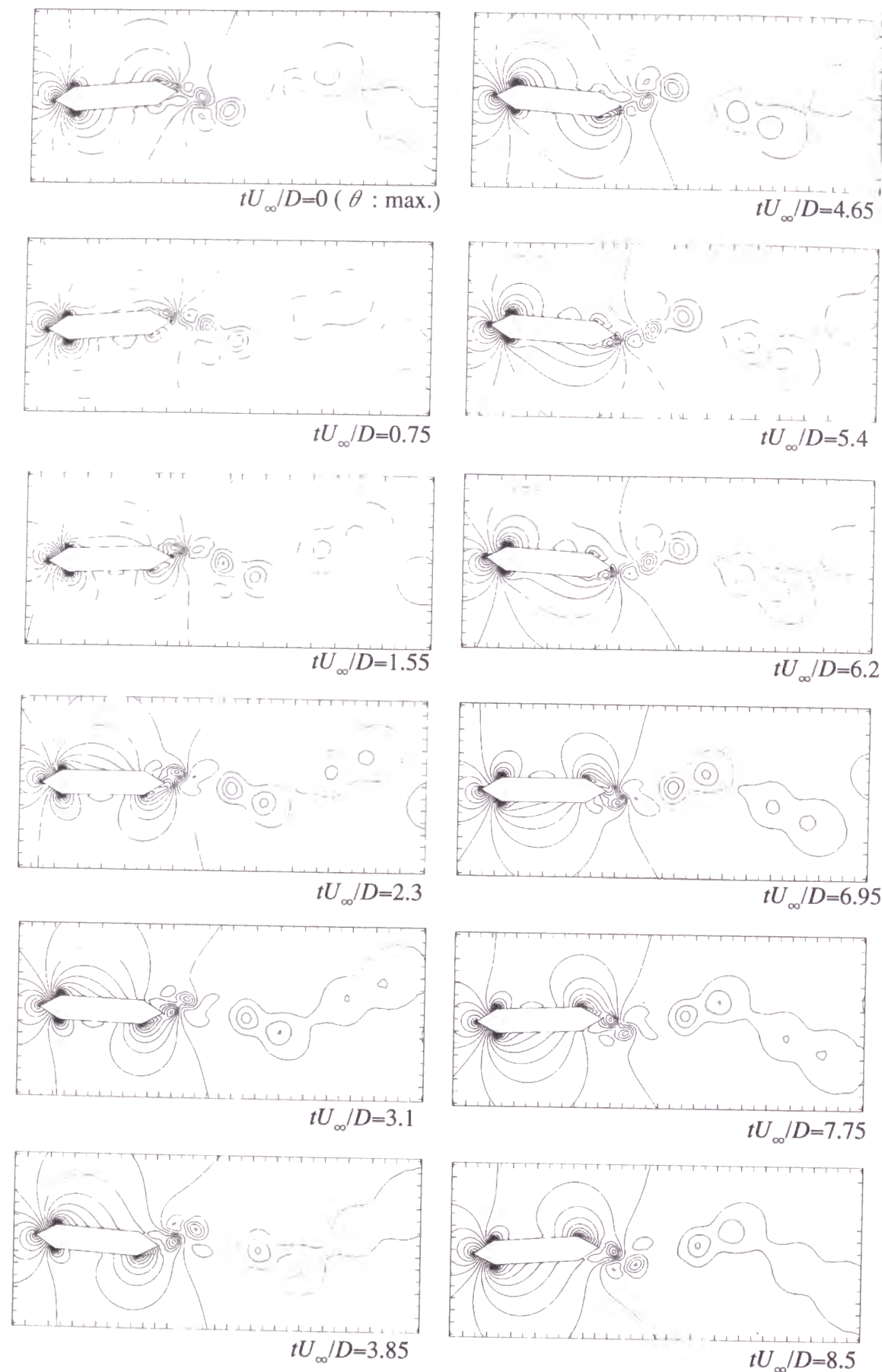


図7.4 扁平六角形断面のねじれ自由振動時 ( $Ur=9$ ) の圧力の振動1周期間の時間変化

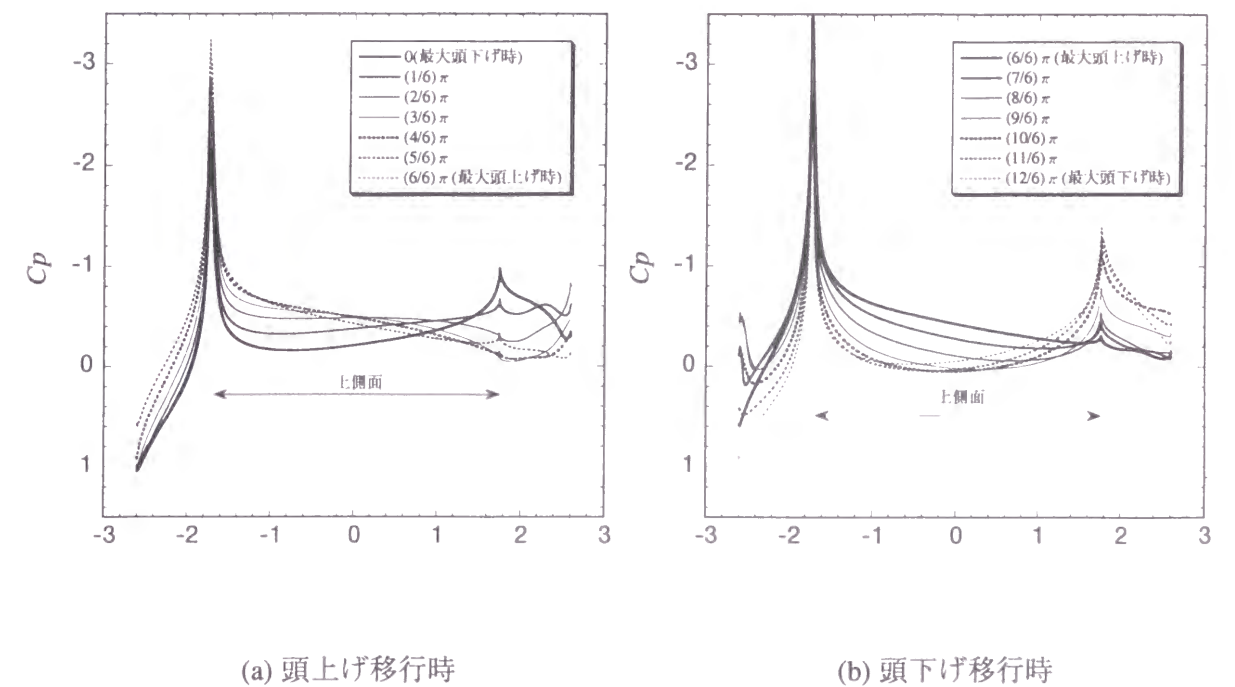


図7.5 扁平六角形断面のねじれ自由振動時の側面上の風圧分布 ( $Ur=9$ )

## 7.2.2 解析結果

本解析では本実験結果と比較するため、実験により計測された減衰定数を付与する。具体的には、各無次元風速における定常振幅に対応する減衰定数を図7.2から読み取り、その値を各無次元風速について一定値として解析の減衰定数とした。

図7.1には●で本解析結果を示す。渦励振の立ち上がりは一致しているが、最大振幅は実験結果では0.1radであるのに対し解析結果は0.08radとやや小さい。

断面前縁からは渦は発生しないものの後縁からの渦放出がKarman渦と同期して励振が発生するとしている。

図7.3には実験結果および解析結果で渦励振の最大振幅が認められた $Ur=9$ の場合の振動1周期間の渦度の等値線図を示す。流れは振動に伴って前縁からはほとんどはく離せず、流れは断面に沿って流れる。後縁では上下交互にせん断層がやや巻き込み、断面からかなり隔たった位置で渦となって後流に放出されている。

図7.4には振動1周期間の振動中の圧力の等値線図を、図7.5には振動中の側面風圧変動を示すが、大きな負圧は風上側の隅角部に作用しているのが認められる。

図7.6には非定常風圧分布( $Cp_i \times r$ )を示す。側面の風上側と風下側のフェアリング部の風圧力は励振モーメントとなっている。一方、風上側のフェアリング部と側面の中央部より風

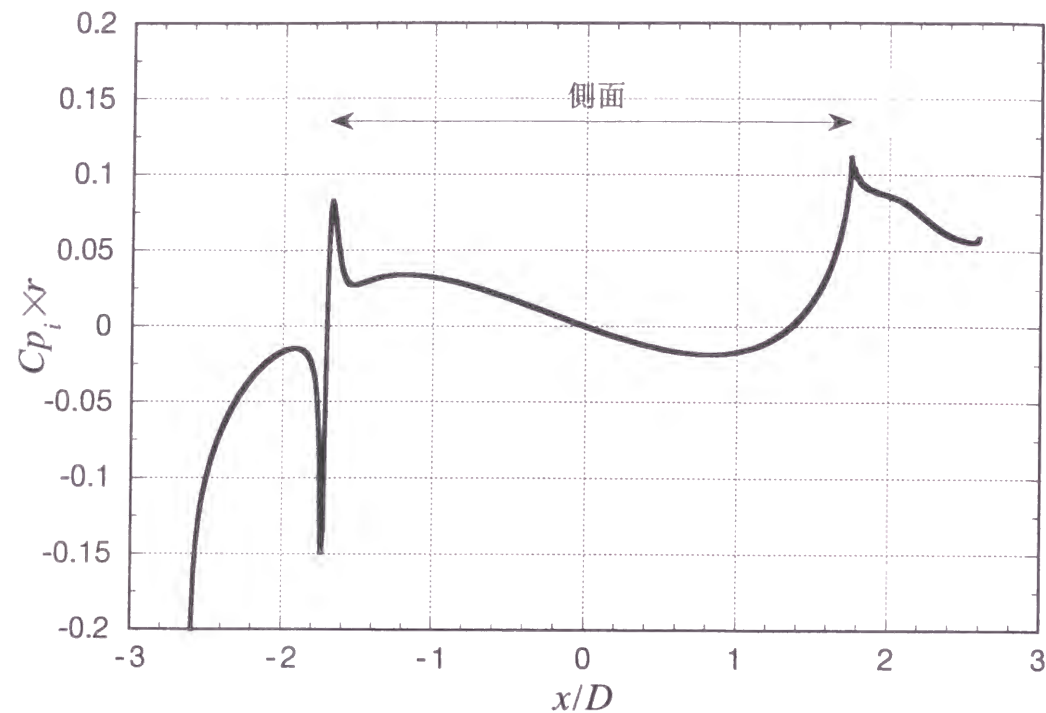


図7.6 扁平六角形断面の非定常空力モーメント  $Cp_i \times r$  ( $Ur=9$ )

下側は減衰モーメントとなっている。

### 7.3 平板空気力による検証

フラッター解析では運動に伴って各自由度間に生じる連成空気力の評価が重要となる。平板が並進およびねじれ振動する場合にそれぞれの運動にある位相差をもった揚力およびモーメントが作用する。適当な位相進みとなる場合、これらの空気力は運動に対してそれらを助長する方向に働くことになる。

フラッター解析をする上で、与えられた断面の性質を把握するためにしばしば平板の解との比較がなされる。平板が並進およびねじれの調和振動する場合の空気力は2次元振動翼理論によって与えられる。したがってまず平板空気力がどの程度までに再現できるかを確認しておくことは、本数値解析手法を連成フラッターの予測に適用するにあたってまず必要なことと考えられる。

ところで、調和振動を行う翼の揚力  $L$  およびモーメント  $M$  は以下のように表される。

$$L = \pi \rho b^2 \left[ \ddot{h} + U \dot{\alpha} - b a \ddot{\alpha} \right] + 2 \pi \rho U b C(k) \left[ \dot{h} + U \alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (7.1)$$

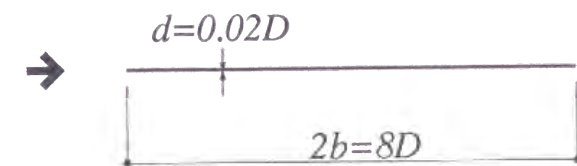


図7.7 本数値解析で設定した平板

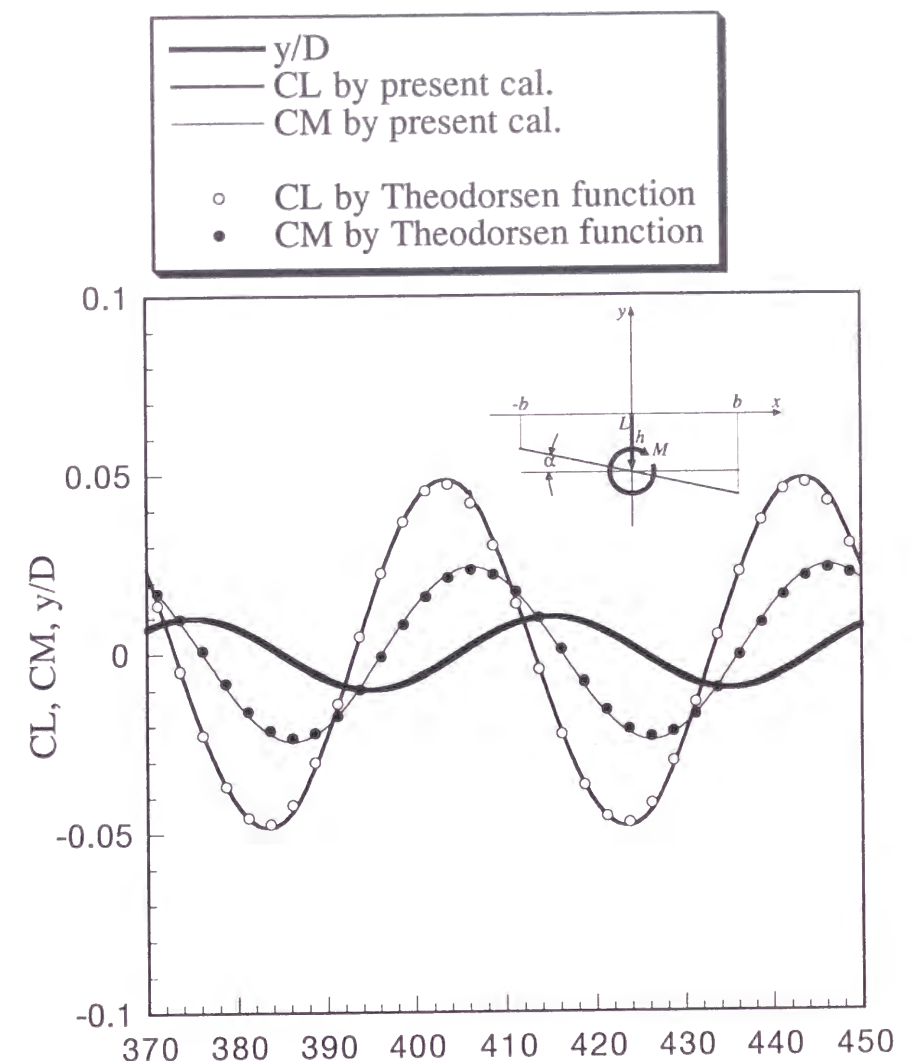


図7.8 並進の調和振動時の空気力の本数値解析結果と2次元振動翼理論による理論値との比較 ( $Ur=40$ ,  $y/D=0.01$ )



$$M = \pi \rho b^3 \left[ a \ddot{h} - U \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2 \pi \rho U b^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[ \dot{h} + U \alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (7.2)$$

ここに  $C(k)$  は  $(k = \omega b/U)$  は以下に示す Theodorsen 関数である.

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)} \quad (7.3)$$

$H_1^{(2)}$  および  $H_0^{(2)}$  はそれぞれ 1 階および 0 階の第 2 種 Hankel 関数で  $H_\nu^{(2)} = J_\nu(k) - i Y_\nu(k)$ ;  $\nu = 0, 1$ ,  $J_\nu$ :  $\nu$  階の第 1 種 Bessel 関数,  $Y_\nu$ :  $\nu$  階の第 2 種 Bessel 関数によって定義されるものである. いま簡単のため平板が  $y = A \cos \omega t$  で表される並進振動のみをしている場合を考えれば, 揚力係数  $C_L = L / (1/2 \rho U_\infty^2 D)$  およびモーメント係数  $C_M = M / (1/2 \rho U_\infty^2 b D)$  は以下ようになる.

$$C_L = 2 \pi k A \sqrt{(k + 2G)^2 + 4F^2} \cos \left( \omega t + \tan^{-1} \frac{k + 2G}{2F} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$C_M = 2 \pi k A \sqrt{\left( ka + 2 \left( a + \frac{1}{2} \right) G \right)^2 + 4 \left( a + \frac{1}{2} \right)^2 F^2} \cos \left( \omega t + \tan^{-1} \frac{ka + 2 \left( a + \frac{1}{2} \right) G}{2 \left( a + \frac{1}{2} \right) F} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.5)$$

ここに  $F = F(k)$  および  $G = G(k)$  ( $k = \omega b/U$ ) は Theodorsen 関数  $C(k) = F(k) + i G(k)$  の実部と虚部である.

解析は図 7. 7 に示す平板について行った. 一般に平板上に発達する境界層が層流から乱流に移移するのは  $(U_\infty x / \nu)_{crit} = 3.2 \times 10^5 \sim 10^6$  と言われている. いまの例の場合, 平板の後端  $l$  においても  $U_\infty l / \nu = 1.76 \times 10^5$  であるため, この例では平板上に発達している境界層は層流境界層である. 図 7. 8 には  $Ur = 40$ ,  $A = y/D = 0.01$  とした場合の本数値解析結果と振動翼理論によって得られた理論値との比較を示す. 本解析結果は理論値とよい一致を示している.

## 7. 4 結論

本章では矩形断面以外の断面形状への  $k$ - $\epsilon$  モデルの適用を検討した. 本章ではまず付着型断面の例として正三角形の両端フェアリングを有する扁平六角形断面を取り上げ, その空力振動が  $k$ - $\epsilon$  モデルによって再現されるかどうかを検討した. 次に調和振動する平板を取りあげ, 2 次元振動翼理論による平板空気力 (揚力およびモーメント) の理論値との比較を行った. その結果は以下のとおりである.

(1) 扁平六角形断面の応答の比較では渦励振の立ち上がりは一致しているが, 最大振幅は実験結果に比較して解析結果はやや小さい.

(2) 扁平六角形断面の風下側のフェアリング部の風圧力は励振モーメントに寄与している. 一方, 風上側のフェアリング部と側面の中央部より風下側は減衰モーメントを生成している.

(3) 並進で調和振動する平板における揚力およびモーメントの本解析結果は, 2 次元振動翼理論により得られた理論値 (Theodorsen の平板空気力) に精度よく一致した.

## 参考文献

- 1) 白石成人，松本勝：充腹構造断面の渦励振応答特性に関する研究，土木学会論文報告集，第322号，1982.6，37-50
- 2) 松本勝，島原明，藤井大三，大東義志：充腹構造断面の渦励振応答に及ぼす乱流効果に関する実験的研究，第14回風工学シンポジウム論文集，1996，497-502
- 3) 鷺津久一郎，応用力学講座18，空力弾性学，共立出版，1959

## 第8章 結論および今後の課題

本研究では構造基本断面を過ぎる流れ場に $k-\epsilon$ 型2方程式モデルによる数値流体解析を適用し、その空力弾性挙動を予測することを試みた。得られた成果は以下のように要約される。

第1に、断面辺長比 $0.6 \leq B/D \leq 8.0$ を有する矩形断面柱に関して、修正型 $k-\epsilon$ モデル（Kato-Launderモデル）による2次元解析を適用し、静止時におけるそれらの渦放出に伴う空力特性を解析し実験と精度よく整合することを示すことによって、本モデルのbluff bodyの空気力評価における有効性を拡大した。

第2に、並進1自由度の空力振動問題に関して、 $B/D=2$ および $B/D=4$ 矩形断面柱を対象とした解析を行い、1せん断層不安定型の渦励振およびギャロピングを再現することができることを示し、本解析法の空力振動問題への適用性を示した。

第3に、ねじれ1自由度の空力振動問題に関して、風洞実験を行い、断面辺長比 $0.6 \leq B/D \leq 8.0$ におけるねじれの空力振動性状に関して詳細に調べるとともに、解析の検証のために必要なデータの蓄積を行った。さらに $B/D=2$ および $B/D=4$ 矩形断面に関して解析を行い、ねじれの渦励振とねじれフラッターが再現できることを示し、 $k-\epsilon$ モデルのねじれモードの振動現象再現への適用性を明らかにした。

第4に矩形断面以外の断面形状として、正三角形の両端フェアリングを有する扁平六角形断面をとりあげ、そのねじれ1自由度振動に関して実験と解析を行った。解析結果は実験結果をよく再現し、本解析手法が付着型断面の応答をも再現できることを示した。さらに、連成フラッター時の連成空気力の評価への適用性検討のための足掛かりとして、風直角方向に調和振動する平板について解析を行い、2次元振動翼理論による理論値との比較を行った。その結果本解析結果はTheodorsen関数による平板空気力と精度よく整合することが確かめられ、連成空気力の評価にも適用できる可能性を示した。

上記一連の検証を通して、 $k-\epsilon$ モデル（Kato-Launderモデル）を用いた2次元解析は断面辺長比 $0.6 \leq B/D \leq 8.0$ の範囲のbluff bodyの空力振動問題への適用の可能性が示された。ただしbluff bodyの空力振動性状は多種多様であるため、本研究で検証した例はその中のごく限られた部分であり、この断面辺長比領域のすべての現象再現に対して適用性があるとはいえない。しかし3次元解析を行わずに2次元解析のみで現象が再現できる点は、特に実用的な面で大きなメリットであると考えられる。

本研究で得られた最も注目すべき成果は、第3章において示したように静止時における風力の変動成分に関して、 $k-\epsilon$ モデルはそのアンサンブル平均型モデルの特質上、periodic成分のみしか評価できず、stochastic成分が無視できない場合には正確には表現できないことである。この点はバフエティング振動の再現において致命的な欠陥となりうる。しかしこのことは、自



励空気力による振動時においては風力中のstochastic成分に比べperiodic成分が卓越するため問題にはならない。2次元解析であるがゆえの高速性とあいまって本解析法はむしろこのような動的問題において本領が発揮されるものと考えられる。一方、静止時における変動空気力の評価に関しては、今後新たなモデルの提案が望まれる。

本研究の今後の課題としては以下のように考えられる。

本研究では無次元風速が30以下の比較的無次元風速が低い範囲内に限って、その中で生じる現象、すなわち渦励振、ギャロピングおよびねじれフラッターを対象に解析を行った。高無次元風速域で重要になる連成フラッターへの適用性に関しては今後の課題のひとつとしてあげられよう。

さらに、本研究では一様流中の解析のみを行った。これは一様流中で種々の空力弾性振動が最も鋭敏に現れるからでもあり、実際、橋梁の耐風設計では一様流による照査が行われており、工学的意味があると考えられるからである。しかし流入風に変動が含まれる場合の空力性状は一様流中とは異なり、またその評価は実用面において重要である。この点に関して、本解析の最大のメリットである2次元解析がゆえの高速性を損なうことなく、変動流入風を組み入れることは本解析法の今後の発展に向けた1つの大きな課題であると考えられる。

## 本論文に関連した文献

- 1) 嶋田健司：自己励起型渦励振の数値解析，第13回風工学シンポジウム論文集，282-292，1994
- 2) 嶋田健司：扁平矩形断面柱の渦励振の数値解析（断面比1：2角柱の自己励起型渦励振），第8回数値流体力学シンポジウム論文集，1994
- 3) 嶋田健司：扁平矩形断面柱の渦励振の数値解析，日本機械学会論文集(C編)，第61巻，585号，22-29，1995.5
- 4) 嶋田健司：CFDによる建築物まわりの流れと空力予測 -耐風設計への適用にむけて-，日本機械学会[No.97-32]講習会教材'CFDによる物体まわりの流れと抗力予測'，27-39，1997.6
- 5) 嶋田健司，孟 岩：一様流中の矩形断面柱に関する $k-\epsilon$ モデルによる二次元数値解析，日本風工学会誌，第71号，199-200，1997
- 6) 嶋田健司，孟 岩：一様流中の円柱に関する $k-\epsilon$ モデルによる二次元数値解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，B-1，20164，1997.9
- 7) 嶋田健司，孟 岩： $k-\epsilon$ モデルによる矩形断面柱の空力特性評価，第11回数値流体力学シンポジウム論文集，217-218，1997
- 8) 嶋田健司，孟 岩： $k-\epsilon$ モデルによる $B/D=2$ 矩形断面柱の空力弾性振動の数値解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，B-1，1998.9
- 9) 嶋田健司，孟 岩：矩形断面柱の空力特性と $B/D=2$ 断面柱の空力振動の $k-\epsilon$ モデルによる数値解析，第15回風工学シンポジウム論文集，161-166，1998.12
- 10) 嶋田健司，孟 岩：種々の辺長比を有する矩形断面柱の空力特性評価に関する修正型 $k-\epsilon$ モデルの適用性の検討，日本建築学会構造系論文集，第514号，73-80，1998.12
- 11) 嶋田健司，石原孟： $B/D=4$ 二次元矩形断面柱の渦励振の $k-\epsilon$ モデルによる数値解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，1999
- 12) Shimada, K., Ishihara, T., : Prediction of aeroelastic vibration of rectangular cylinders by  $k-\epsilon$  model, *Journal of Aerospace Engineering*, 12(4), 122-135, 1999
- 13) Shimada, K., Ishihara, T., : Application of a modified  $k-\epsilon$  model to the prediction of aerodynamic characteristics of rectangular cross-section cylinders, *Journal of Fluids and Structures* (投稿中)

## 謝辞

本研究を完成するにあたり、多くの方々から御指導と激励とを賜りましたことに感謝の意を表します。

本研究は京都大学大学院 松本勝 教授の御指導と御鞭撻にもとづき完成されたものであり、ここに深く感謝の意を表します。風工学において常に空力弾性振動研究の最先端をゆく松本教授の生き方には風工学を志して以来かねてから遠巻きながらにも憧れをもっておりました。今回の研究が結実できたのは松本教授よりいただいた暖かい激励によるものであります。

京都大学防災研究所 桂順治 教授、京都大学大学院 白土博通 助教授には本研究の遂行に際して適切なご指導をいただきました。京都大学大学院 渡邊英一 教授、辻文三 教授には本論文をまとめるにあたって適切なご指導を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

東京工芸大学 田村幸雄 教授には学生時代に風の研究をはじめのきっかけを作ってくださったこと以来、終始、研究において常に的確な指示を与えてくださり、本研究遂行中も暖かく見守ってくださいました。ここに深く感謝の意を表します。

また本研究の遂行にあたり、清水建設（株）技術研究所 建築研究開発部 計画技術グループ 風工学チームの方々には大変お世話になりました。主席研究員 日比一喜 博士には、本研究の遂行にあたり常日頃から励ましと的確な御指導を頂だき、ここに感謝いたしたいと思えます。石原孟 博士は本研究の共同研究者であり、実に多大な貴重な意見、アイデア、議論をいただきました。特に乱流解析の視点から多くの的確な方針を与えていただき、本研究は氏の存在なくしては完遂できなかったものであります。研究の途中で実に多くの困難に直面したときも、目的を見失うことなく、また絶えず勇気づけてくれた氏のお心づかいには感謝してもしきれないものがあります。主任研究員 若原敏裕 博士、菊池浩利 研究員、松井正宏 研究員とは入社以来、風工学全般にわたって日々共に意見をかわしあい、また本研究の遂行にあたっても有益な御助言と励ましをいただき、大変勇気づけられた次第であります。鈴木康裕 氏と藤原隆男 氏には風洞実験において実に多大な御尽力をいただきました。本研究は両氏の存在なくしては完遂できなかったものであります。伊藤さつき 女史にはコンピューターグラフィックスにおいて多大な御尽力をいただきました。ここに感謝の意を表します。

平成11年12月

嶋田健司